

EL PLANETA DE LAS MATEMÁTICAS (Y SU PRIMA DE CUENCA): GUÍA PARA NO ESCOÑARSE DANDO LOS PRIMEROS PASOS EN UN NUEVO MUNDO.

RAMON FERRER I MARI



NOVIEMBRE DE 2023 – NOVIEMBRE 2024

INTRODUCCIÓN: QUIÉN SOY Y POR QUÉ ESCRIBO ESTO.

Soy un señor que, en el momento de escribir éste texto, tengo 56 años, lo que quiere decir que nací en el año 2023 – 56 = 1967. Tras unos años de dura lucha, he conseguido tener mi vida profesional estabilizada, con lo que ahora ya puedo dedicar mis horas libres, que no son muchas, a hacer lo que me dé la real gana.

Me encanta escribir y enseñar. Digamos que soy un profesor frustrado. Y soy lo que se llama una persona "*de letras*", o sea, que para mí las matemáticas fueron un trago insufrible.

Puedo elegir quedarme en un rincón, llorando mi desgrácia, o puedo elegir echarle valor y, superando mi indefensión aprendida respecto a las matemáticas, volver a aprenderlas, aprovechando las nuevas tecnologías (Videos de YouTube) y los nuevos libros de texto.

Respecto a los primeros, al final de esta revista te dejo un listado de 8 profesores YouTubers muy interesantes. Es una lista totalmente subjetiva, es decir, son aquellos profes cuyas enseñanzas me han servido personalmente. Obviamente hay muchos más. Tu debes revisarlos todos hasta que encuentres, al menos, uno/a que te haga fáciles las matemáticas.

Respecto a los segundos, no tienen nada que ver con los que yo tuve que lidiar en mis años formativos, que fueron las décadas de 1970 y 1980. Aconsejo especialmente los libros de texto del colectivo Marea Verde, que se pueden encontrar y descargar gratuitamente en la siguiente página web:

www.apuntesmareaverde.org.es

Les rindo homenaje y agradecimiento por el enorme esfuerzo que han hecho, y hago desde ya reconocimiento que he tomado capturas de pantalla y explicaciones de esos libros de texto. Como esta revista se halla a libre y gratuita disposición en mi repositorio de internet, pues respeto la licencia Creative Commons que los ampara.

Y también aconsejo el texto Mexicano "Matemáticas Simplificadas" que incluyo en la Bibliografía final.

Finalmente incluyo algún truco personal que he desarrollado con los años, para poder hacer operaciones sencillas, sin el auxilio de la calculadora.

Nos vemos al final de la revista.

INDICE

A Joan Singla Casasayas que, a sus 92 años, sigue trabajando en lo que le apasiona. Un maravilloso ejemplo de alguien que desconoce la palabra *rendición*.

Moltes gràcies, Sr. Singla.

EL PLANETA DE LAS MATEMÁTICAS (Y SU PRIMA DE CUENCA): GUÍA PARA NO ESCOÑARSE DANDO LOS PRIMEROS PASOS EN UN NUEVO MUNDO.

"Yo soy yo y mis circunstancias" José Ortega y Gasset (1883-1955) Filósofo español.

"Yo soy, cuando comprendo" Leonor Martorell, Psicóloga y psicoterapéuta.

Estimado/a Lector/a:

Esta revista que tienes entre manos no es un sesudo tratado de Matemáticas (Mates, para los amigos). Pretendo darte una mini guía que te oriente, un poco, una vez que hayas aterrizado en este planeta. Un nuevo mundo lleno de números, letras, representaciones gráficas y fórmulas.

Para una parte de la población este es un mundo apasionante, lleno de posibilidades y nuevas experiencias. Como una mujer paseándose por un colorido y oloroso jardín inglés, con su explosión de colores y agradable estimulación de lo sentido del olfato… Una parte importante de ese reducido colectivo se convertirán en Matemáticos, tras pasar por la Universidad lo que les convierte, en España, en *Licenciados en Ciéncias Exactas*, que es el nombre técnico y culto de ese oficio. A otros/as, les estimula estudiarlas para poder aplicarlas en campos que les atraen como la Física, las diversas Ingenierías (que son la aplicación práctica de la Física), la arquitectura, la economía y otras muchas ciencias en las que las matemáticas son imprescindibles en su función describir los fenómenos que nos rodean.

Pero, no nos engañemos, son muchos/as los que abren un libro de matemáticas con la misma alegría y entusiasmo que siente una niña, al ser tumbada sobre el regazo de su madre, con sus braguitas por los tobillos, para que una enfermera le ponga una dolorosa inyección intramuscular… *Un planazo*, que suele terminar con la sufrida niñita llorando como una magdalena, por su dolorida nalguita.

Ironías aparte, voy a intentar hacerte una introducción a un mundo, que mucha gente siente como más árido y hostil que los desiertos que aparecen en la pelicula DUNE.

LA ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN.

"No es lo mismo comprarse un traje negro, que verse negro para comprarse un traje".

"No es lo mismo dos bolas chicas[1], que dos chicas[2] en bolas[3]".

Estos dos dichos, habituales en España, nos marcan la importancia que tiene organizar correctamente la información, tanto la que nos dan, como la que proporcionamos a los demás.

Las matemáticas son un lenguaje en sí mismo, pero debemos cuidar el lenguaje hablado y escrito en todo momento.

En la vida, en nuestro lenguaje y en las matemáticas debemos aplicar la regla de las tres C: Hay que ser Claro[4], Conciso[5] y Concreto[6].

Muchos malentendidos en la vida se solventarían con sólo aplicar estos tres puntos. A mí me lo enseñó el gran maestro de la Gestalt española, el valenciano Albert Rams, con una máxima muy sencilla de recordar, que responde a tres simples preguntas:

1. **¿Qué quieres?,**
2. **¿Cómo lo quieres?,**
3. **¿De quien lo quieres?"**

Y la respuesta genérica correspondiente es del tenor siguiente:

"Yo quiero esto, lo quiero de esta manera y lo quiero de ti".

Veamos estos tres ejemplos:

"Yo quiero un beso, lo quiero en los lábios y lo quiero de ti".

"Yo quiero que (tú) me des un masaje en la espalda, que incluya la nuca, los brazos y las nalgas"

[1] En este caso, chica equivale a "*cosa de pequeño tamaño*".
[2] En este caso, chica es sinónimo de "*muchacha*" o "*mujer joven*".
[3] En Castellano de España, la expresión "*estar en bolas*" significa que esa persona esté desnuda, sin ropa alguna que cubra su cuerpo.
[4] Inteligible, fácil de comprender.
[5] Capacidad de Brevedad y economía de medios en el modo de expresar un concepto con exactitud.
[6] Ser capaz de reducir a lo más esencial y seguro la materia sobre la que se habla o escribe.

"Yo quiero que (tú) me prepares un bocadillo de 30 centímetros de largo, con pan de baguette, que lleve una tortilla francesa de dos huevos y dos lonchas de bacon. El huevo lo quiero bien cuajado y el bacon, poco hecho".

Evidentemente, como pasa en el último ejemplo, contra más detalles demos, más fácil le resulta a la otra persona el poder satisfacer nuestro deseo con mayor exactitud.

El riesgo de no ser claro, conciso y concreto puede ser algo así…



Sin datos del autor.

¿Son las Matemáticas o soy yo?

Pues para ser justos, las responsabilidades van al 50%.

Pero antes, una pequeña introducción: No te pienso hablar de "culpas" porque no sirve para nada más que evitar las responsabilidades.

Culpa sería "*una acción, omisión o causa de un suceso o de una acción negativa o perjudicial, que se atribuye a una persona o a una cosa*".

Responsabilidad es una cualidad que tenemos los seres humanos y que consiste en "*Poner cuidado y atención en lo que hacemos o decidimos*".

Cada persona es responsable de lo que hace o no hace, dice o deja de decir. Como dijo un amigo mío argentino:

"*Si tenemos dos ojos, dos oídos, dos hemisferios cerebrales y sólo una boca, es porque hay que observar dos veces, oir dos veces, y pensar dos veces, antes de decidir si queremos hablar una sola vez".*

A lo que yo añadiría que, en ciertas ocasiones, tras pensarlo dos veces, también es una buena opción no decir nada.

Dijo una vez un vecino mío, muy inteligente, que una persona tiene que "*Poder explicar siempre las razones que te llevaron a escoger la decisión A sobre la B. Otra cosa muy diferente es que la decisión A sea la correcta. Pero aún así, has de poder razonar por qué la tomaste y, por ende, acertaste o te equivocaste*".

Lo mismo sucede con el resultado de la investigación de un accidente aéreo. En no pocas ocasiones, una investigación aérea concluye que el piloto no tuvo la culpa del accidente. Y eso se debe a que se estudia al piloto y a su entorno ("*Yo soy yo y mis circunstáncias*"), para averiguar cuál era la información de la que disponía exactamente justo antes del accidente. Eso permite descubrir si, con la información de que disponía, tomó la decisión más acertada y racional. En ese caso, se determina que el accidente se debió a causa que el piloto tenía una información o informaciones que eran insuficiente/s o, directamente errónea/s. Es decir, se le exonera de responsabilidad porque, con lo que sabía en ese momento, tomó la decisión acertada y coherente a lo que sabía, no a lo que las circunstáncias exigian para poder haber evitado el accidente.

"Al César lo que es del César" parte 1: Lo que es de las Matemáticas.

Afortunadamente ya hace algunos años que el progreso social en la Psicología del aprendizaje puede explicar las dificultades que algunas personas tienen con las mates. Os reproduzco trozos de un interesantísimo artículo[7] para profesores/as de matemáticas que, a mi entender, ilustra muy bien esta situación:

"Frases como «yo no sirvo para las matemáticas» se oyen, desgraciadamente, muy a menudo en las aulas (y en la calle). Para muchos estudiantes, las matemáticas son una asignatura difícil y frustrante. Por tanto, ayudarlos a superar esta sensación para mejorar su aprendizaje supone un reto. Pero, ¿qué es lo que hace que las matemáticas sean tan desafiantes para algunos? (…).

[7] "4 recomendaciones para que tus alumnos superen el miedo a las matemáticas" Innovamat Blog. 23 abril 2023. https://blog.innovamat.com/es/recomendaciones-miedo-matematicas/

La dificultad de las matemáticas

Una de las razones por la que las matemáticas resultan difíciles es porque requieren un tipo de pensamiento diferente al de muchas otras asignaturas; ***más lógico, sistemático y abstracto****. Esto supone un desafío para los estudiantes que no se sienten cómodos con este tipo de pensamiento, que no han desarrollado aún habilidades fuertes de resolución de problemas o que presentan dificultades de aprendizaje directamente relacionadas con este tipo de pensamiento, como la discalculia.*

Otra razón es la estructura jerárquica de las matemáticas, que requiere un aprendizaje muy secuencial: muchos de los nuevos conceptos se construyen sobre los conceptos que le preceden. Esto implica que, si un alumno no adquiere un conocimiento en un momento dado, le puede resultar difícil entender los conceptos que llegan después. Esto puede dar lugar a una sensación de «quedarse atrás» que, prolongada en el tiempo, se vuelve irremediable.

Además, es probable que algunos de estos alumnos desarrollen falta de confianza en sus habilidades matemáticas, lo que puede desencadenar experiencias negativas que no hacen más que alimentar estas inseguridades. (…).

Refuerza las habilidades socioemocionales

Ayuda a tus alumnos a desarrollar una ***actitud positiva*** *hacia las matemáticas elogiando su esfuerzo y progreso en vez de solo su resultado final. Anímalos a perseverar y a no rendirse, y recuérdales que no deben temer al error.*

En general, los bloqueos en matemáticas son comunes, pero se pueden superar con la mentalidad y las estrategias correctas. Si fomentas una mentalidad de crecimiento, proporcionas muchas oportunidades de práctica y usas materiales prácticos y ayudas visuales, puedes ayudar a tus alumnos a superar las inseguridades en matemáticas y a disfrutar del aprendizaje. (…).".

"Al César lo que es del César" parte 2: Lo que puedes hacer tú por ti mismo/a.

Ya hemos visto que las matemáticas presentan dos grandes dificultades: que son abstractas y secuenciales.

La buena noticia es que el pensamiento abstracto se puede cultivar, como las lechugas o las margaritas, mientras que la secuencialidad se puede favorecer con una buena estratégia de pensamiento[8].

Las matemáticas han de ser forzosamente abstractas, puesto que no dejan de ser una herramienta que nos ayuda a describir una parte del mundo. El número 2 implica que hay dos unidades de algo, que son 1 + 1 unidades, por ejemplo, manzanas, que es el ejemplo típico que se usa para explicarnos aritmética, cuando somos niños/as.

La secuencialidad la podemos definir en seis àreas básicas, siendo la Aritmética y el Álgebra, los cimientos que sostienen a las otras cuatro:

1. Aritmética.
2. Álgebra.
3. Geometría Euclideana y Trigonometría.
4. Geometría Analítica.
5. Cálculo Diferencial.
6. Cálculo Integral.

Las dos primeras, Aritmética y Álgebra, son el a,e,i,o,u, o sea, lo más básico. Es imprescindible obtener un buen dominio sobre esas dos materias o será imposible alcanzar a dominar a las Matemáticas. Las otras cuatro son: La Geometría Euclideana y Trigonometría, la Geometria Analítica, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Existe una cierta *ceremonia de confusión* debido al hecho de que, según el país y según el matemático, a ciertas áreas se las denomina de una forma u otra o se agrupan de determinada manera.

Así tenemos que, a las dos últimas áreas, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, algunos autores las agrupan con dos nombres diferentes, siendo uno el de *Cálculo Infinitesimal* y el otro nombre el de *Análisis Matemático.*

Debido a que los libros de texto responden a los requerimientos de los planes de estudios que cada país determina para su sistema educativo, he escogido un texto más generalista procedente de México. Se titula *Matemáticas simplificadas*. Os dejo la reseña completa en el apartado de Bibliografía.

Voy a desarrollar un poco cada tema y os añado el índice del citado libro.

[8] Una estratégia es diseñar un conjunto de acciones destinadas para alcanzar un objetivo específico o una meta.

<u>¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?</u>

Si tiramos de diccionario, el de la RAE específicamente, nos da la siguiente definición:

"*Matemática. F. Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.*"

A ver, como definición, queda muy molona y tampoco podemos pedir más. Pero vayamos un poco más allá.

Si intentamos quintaesenciar, es decir, reducir a la explicación más sencilla posible, una de las características o razones de existencia de las matematicas, ésta es la de averiguar un *dato*[9] que desconocemos, al que llamamos *incógnita*[10], a base de realizar alguna manipulación a la que llamaremos *operación*[11] con, al menos, otros dos *datos* que sí conocemos.

Ejemplo: ¿Cuál es el resultado (*incógnita*) de la suma (*operación*) de 6+4 (*datos*)?. Pues si sumamos 6+4 nos dá como resultado de la incógnita el número natural 10.

¿Y por qué los humanos nos metimos en éste berenjenal?

Pues por curiosidad y sentido práctico. Desde muy antiguo hemos tenido la necesidad natural de saber cuántos miembros de la tribu éramos, cuántos trozos de carne teníamos para repartir y cuántas bayas y frutos silvestres habían recogido las mujeres.

Imagina que tenemos tres trozos de carne y hemos de informar la jefe de la tribu, que está en la otra punta del valle. A ver cómo se lo decimos si, primero, no desarrollamos un sistema numérico.

Así que, para esas primeras representaciones, el ser humano echó mano de lo que tenía… y lo más fácil eran los dedos de las manos, por eso nuestro sistema numérico es decimal, es decir, que lo contamos todo, de diez en diez. A eso le llamamos Base 10.

[9] Información sobre algo concreto que permite su conocimiento exacto o sirve para deducir las consecuencias derivadas de un hecho.

[10] Cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema para resolverlos. Diccionario RAE.

[11] Acción, maniobra o conjunto de acciones destinadas a obtener un resultado concreto.

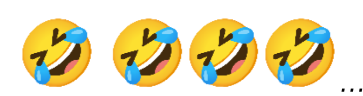
Y ahora es cuando salta mi simpática y graciosa amiga, Maria Primitiva, y me suelta el versito picante que reza:

"Entre los dedos de las manos,

Los dedos de los piés,

El genital y mis senos,

Me suman veintitrés…".



… *Pero volvamos a ponernos serios.*

Sistemas de numeración ha habido bastantes a lo largo de la historia y del planeta. Veamos algunos ejemplos:

En la América prehispánica tenemos el sistema Maya, sobre base 5. En el antiguo Egipto tenían uno en Base 10 y en la cuna de la civilización, Babilonia lo tenían en Base 60, por poner sólo tres ejemplos.

Respecto a la representación gráfica de los números, hacemos servir el sistema indoarábigo, también en Base 10, que tiene la ventaja de representar cada número, del 1 al 9 con un solo símbolo, e incorpora el cero como elemento neutro. Y permite ampliar las cantidades hasta el infinito, con sólo ir añadiendo números por delante o por detrás:

Si al 5 le añadimos un 7 por delante pasamos a tener 75 elementos y si le ponemos tres ceros por detrás, ahora tenemos el número 75000 (setenta y cinco mil)… Fácil ¿No?

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

5

Fuente: Matemáticas Simplificadas. CONAMAT de México. Página 5.

LAS "CUATRO REGLAS" DE LA ARITMÉTICA: SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR Y DIVIDIR.

Así se han conocido tradicionalmente a las operaciones básicas de la aritmética. De hecho durante siglos, la formación más elemental que recibían nuestros antepasados se basaba en enseñarles éstas cuatro reglas, con más habilidades de lectoescritura (en cristiano, que supieran leer y escribir, ni que fuera con un montón de faltas de ortografía…). Recordemos que, durante la Edad Media, el analfabetismo era la regla, y no la excepción, en Europa.

Cuando se trata de ir añadiendo elementos, inventó la **suma**. Técnicamente se define como "*la operación que tiene por objeto reunir las unidades de varios conjuntos en uno único*". Os dejo una tabla de sumas, donde el resultado se obtiene mediante cruzar filas y columnas.

De éste modo, si queremos saber cuanto es la suma de 5 y 7, tomamos el 5 de la zona de columnas (la numeración de más a la izquierda) y lo cruzamos con el 7 que aparece en la zona de filas (la numeración de arriba del todo) y el resultado que nos dá es 12.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fuente: es.tableworld.net Tablas Online.

Vale, todo esto está muy bien y funciona de coña cuando se trata de ir añadiendo elementos, ¿Pero qué hacemos si, en lugar de añadir elementos, queremos quitarlos? ¿Y cómo narices lo hacemos para describir la situación en la que no tenemos ningún elemento?.

Pues para ello, aparte de la operación de la resta, hubo que inventar los números negativos: …-5,-4,-3,-2,-1. Y para la situación en la que no hay ningún elemento se inventó el 0 (cero).

Os dejo un recorte de Matemáticas Simplificadas del CONAMAT de México. Página 4 donde lo explican y amplían mejor que yo.

Clasificación

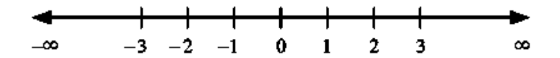
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



La **resta** es la operación inversa a la suma:

$$y - b = z \qquad 5 - 2 = 3$$

donde "y" se llama *Minuendo*, "b" se llama *sustraendo* y el resultado "c" se denomina *diferencia.*

El resultado puede dar un numero positivo o uno negativo, caso que el sustraendo sea un numero mayor que el minuendo

$$7 - 9 = -2$$

Otra manera de definir la resta es decir que es la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo

$$y + (-b) = z \qquad 5 + (-2) = 3$$

La **multiplicación** es el acto de sumar varias veces la misma cantidad. Así pues si multiplicamos 3 x 2, lo que estamos haciendo es sumar dos veces el número tres.

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 6$$

Os dejo una tabla que sirve para hallar las multiplicaciones y que sigue los mismos princípios operativos que la de la suma.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fuente: Educando en la diversidad. https://educandoenladiversidad-gomi.blogspot.com/2012/04/los-acnees-y-las-tablas-de-multiplicar.html.

De su observación podemos deducir tres cosas:

a) Tabla del 0. Todo número multiplicado por 0 es 0.
b) Tabla del 1. Todo número multiplicado por 1 es ese mismo número. 5x1=5.
c) Tabla del 10. Sólo hay que añadir un 0 por la derecha, al número que multiplicamos. 5x10=50.

La regla de los signos del producto de los números enteros y racionales se sigue manteniendo con los números reales. En general, si multiplicamos signos iguales nos dá la el signo positivo (+), es decir

$$(+) * (+) = (+) \quad +2 * +2 = +4$$

$$(-) * (-) = (+) \quad -2 * -2 = +4$$

Mientras que si multiplicamos signos diferentes, nos dá el signo negativo (-), es decir

$$(+) * (-) = (-) \quad +2 * -3 = -6$$

$$(-) * (+) = (-) \quad -5 * +2 = -10$$

La **división** es la cuarta y última regla aritmética y la podemos definir como la acción de repartir una entidad, entre cierto número de elementos. Así pues, tenemos una entidad, llamada Dividendo (el número 24) que repartimos entre cierto número de elementos Divisor (el número 4) y cuyo resultado Cociente (el número 6) es, precisamente lo que obtenemos si multiplicamos el Cociente por el Divisor.

En cristiano, que es la operación inversa a la multiplicación. A ver si esto deja las cosas más claras:

$24 \div 4 = 6$ porque es la operación inversa, de hacer $6 \times 4 = 24$.

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \hline & \text{Cociente} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 4 \\ \hline & 6 \end{array}$$

Los números reales, a los que hemos representado en la recta númérica, tienen ciertas propiedades. Definimos propiedad según la RAE, siendo ésta: "*Atributo o cualidad esencial de alguien o algo*."

En los números reales éstos atributos o cualidades esenciales son las siguientes seis:

Propiedad Interna

Cuando se suman o multiplican dos números reales el resultado que se obtiene es otro número real.

$2 + 7 = 9$ El núm. Real 2 sumado al núm. Real 7 da el núm. Real 9.

Propiedad Asociativa

El modo en que se agrupen elementos a sumar no influye en el resultado de una suma. Y lo mismo pasa en el caso de una multiplicación.

$a + (b + c) = (a + b) + c$ Ej. $5 + (2 + 3) = (5 + 2) + 3$.

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ Ej. $5 \times (2 \times 3) = (5 \times 2) \times 3$.

Como puedes ver, los agrupes como los agrupes, la suma del ejemplo da 10, mientras que la multiplicación del otro ejemplo da 30.

Propiedad Conmutativa

Tanto la suma como la multiplicación de números reales cumplen con la propiedad conmutativa que indica que el orden no varía el resultado.

a + b = b + a

a x b = b x a

Elemento neutro

En la suma el cero se convierte en el elemento neutro pues cualquier número que se sume con el 0 va a dar como resultado el mismo número.
a + 0 = a   5 + 0 = 5

En cuanto a la multiplicación, el elemento neutro en los números reales es el 1, ya que cualquier número real que se multiplique por 1 da lugar al mismo número.

a x 1 = a   5 x 1 = 5

Elemento opuesto

Caso que al sumar dos números reales se obtenga cero, se dice que esos números son opuestos. a – a = 0   8 - 8 = 0.

En la multiplicación el elemento opuesto se da al multiplicar un número por su inverso, con lo que el resultado siempre es la unidad.

Ejemplo $5\,x\,\frac{1}{5} = 1$

Propiedad Distributiva

El producto de un número real por una suma de números reales es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

a x (b + c) = a x b + a x c

Al proceso inverso de la propiedad distributiva se le conoce como sacar el factor común.

a x b + a x c = a x (b + c).

Resumiendo: El conjunto de los números reales está formado por otros números como los naturales, enteros, racionales e irracionales.

Los naturales son aquellos que el hombre inventó primero. Serían el 0,1,2,3,4,5,6…

Los enteros serían todos los naturales a los que añadimos los negativos por el otro extremo del cero …-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5…

Los racionales son aquellos números que pueden representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

O dicho en cristiano, se expresan en forma de quebrado, siempre que el número de abajo sea diferente de cero, en cuyo caso, tanto en aritmética como en álgebra, se conoce como “indefinido”

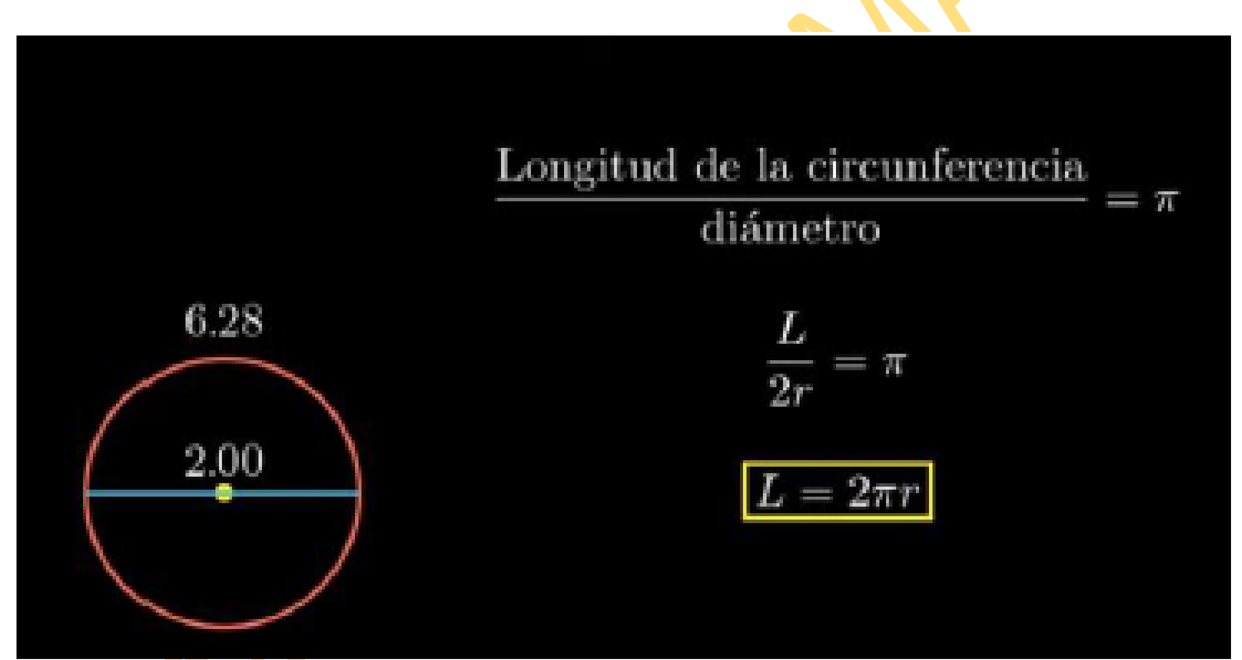
$$\frac{1}{2} \quad -\frac{9}{4} \ldots$$

$$\frac{59}{0} \quad \text{Indefinido}$$

Y, por último, los números irracionales no son aquellos que se hayan vuelto locos o tenido un ataque de nervios 🤣🤣🤣.

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El número irracional más conocido es π, cuyo valor es 3,141592 … que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y que se expresa mediante la fórmula ***P=2×π×R,*** con lo que, para un radio igual a una unidad, el diámetro valdrá 2 unidades y el valor de Π ascenderá a 6,28 unidades.



Fuente: Captura de pantalla del Canal BlueDot.

diferencia entre circulo y circunferencia

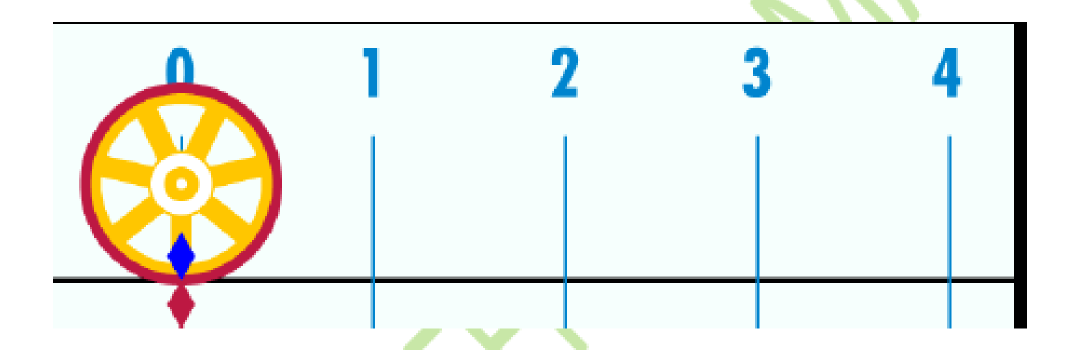
Círculo y circunferencia no son lo mismo. Una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan (o sea: que están a la misma distancia) de un centro. Un círculo, en cambio, es el conjunto de puntos cuya distancia al centro es igual o menor que el radio. En otras palabras: la circunferencia es la línea curva que contiene y bordea; mientras que el círculo es esa línea más todo lo que tiene adentro.

Autor: William Largo Vergara.

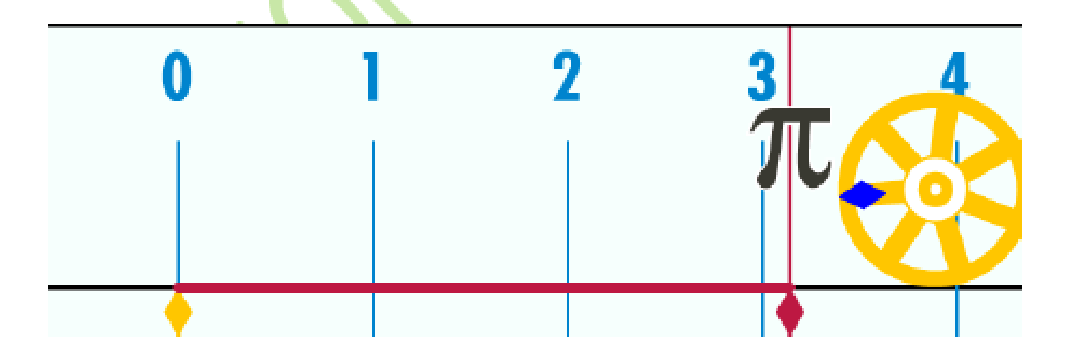
π es el más famoso de los números irracionales. Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. No se puede expresar en forma de fracción.

	Fórmules
Expressió algebraica	$\pi = \frac{L}{D}$

Es una constante porque se repite, no importa el tamaño de la circunferencia que contemplemos. Tomamos por ejemplo la rueda de una bicicleta. Si hacemos una marca en la goma, ubicada en el centro exacto de la banda que toca el suelo,



y la hacemos rodar una vuelta entera hasta que coincida en el mismo punto de contacto con el suelo,



Animación del desenrollado de la circunferencia de un círculo de diámetro uno, para ilustrar la proporción de π.

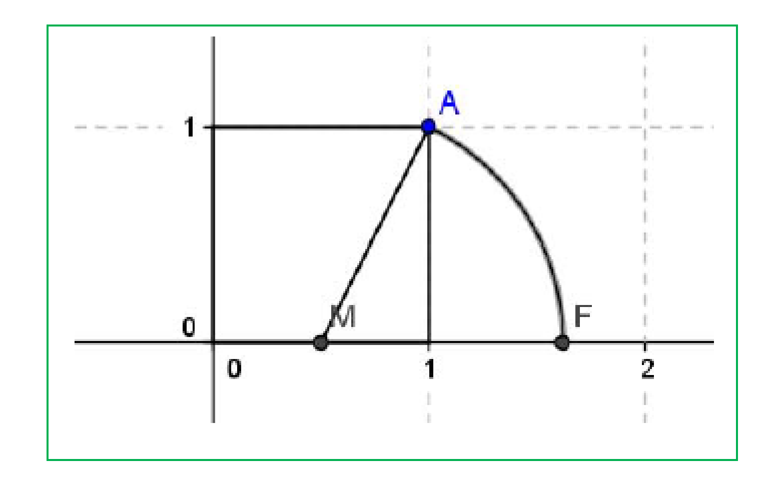
resulta que la distancia que hemos recorrido es de 3,14 veces su anchura (=diámetro).

Da lo mismo que hablemos de la rueda de una bicicleta, la rueda de un monopatín o la de un camión Trailer.

El siguiente número irracional más importante es el número e, cuyo valor es 2,718281… que se usa en procesos de estudio del crecimiento en Biología, en la desintegración radiactiva, y en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

Y el **número áureo**, Φ, utilizado por artistas de todas las épocas por arquitectos, pintores y escultores (el griego Fidias, el italiano Leonardo da Vinci, y muchos más) en las proporciones de sus obras.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749...$$



Autor: Marea Verde. 4º de ESO. Página 17

¿Cómo se ha llegado a este número?

Hacemos una representación gráfica mediante un eje de coordenadas y tomamos como unidad el número 1 en ambos ejes. Al punto donde se encuentran, le llamamos A.

Desde el punto A tiramos una línea que vaya a parar al punto medio del eje horizontal, al que llamamos M.

Si te fijas bien, verás que la figura acotada por los puntos M, 1 y A es un triángulo rectángulo, en el que la línea MA es la hipotenusa, M1 es el cateto adyacente y A1 es el cateto opuesto. ¿Y qué teorema nos relaciona la hipotenusa y sus catetos?

Pues exactamente el teorema de Pitágoras que reza que "Hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

$h^2 = a^2 + b^2$ de lo que deducimos que h = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Y ahora vamos a resolverlo: Tenemos que A1 vale 1 y M1, al ser el punto medio entre el origen 0 y la unidad 1, vale la mitad, o sea, 1/2. Vamos a substituir:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Autor: Marea Verde. 4º de ESO. Página 17

Para los que nos perdemos con las operaciones, en la resolución de MA, al paso tercero llegamos porque debes recordar que cuando sumamos un quebrado con el numero 1 podemos representar ese 1 como un quebrado nuevo, tomando el denominador del quebrado, en este caso 1/4 entre sí mismo.

En cristiano, ese 1 lo podemos representar como 4/4, y hacemos una suma de fracciones de igual denominador, que es muy sencilla, ya que sólo tenemos que conservar el denominador y hacer la suma de numeradores, en este caso 1 + 4 =5, por lo que obtenemos el 5/4.

Al paso 4 llegamos descomponiendo el factor común $\sqrt{\frac{5}{4}}$ en dos partes, es decir, una división de dos raíces individuales que son $\sqrt{5}$ en el numerador y $\sqrt{4}$ en el denominador. La raíz de 5 no la podemos resolver, pero la raíz cuadrada de 4, sí la podemos resolver ya que es 2. Y por eso nos da el resultado de

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Finalmente, al sumar OF y MA, siendo como es una suma de fracciones de igual denominador, hacemos

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como colofón y fin de fiesta, cogemos un compás, ponemos su aguja en el punto M, hacemos coincidir su otro extremo, el que tiene la punta de lápiz, en el punto A y trazamos una curva hasta que alcance al eje horizontal. Y el punto en que se encuentran el punto A y el eje horizontal se llama F.

ARITMÉTICA.

La aritmética es la rama de las matemáticas que estudia los números y las operaciones básicas que se pueden efectuar entre ellos. Entre estas, destacan la suma, la resta, la multiplicación y la división. Conforme las matemáticas fueron avanzando, con el paso de los siglos, la Aritmética se amplió con nuevos componentes como son: Las Potencias, las Raices, los logaritmos, las razones y las proporciones, la notación científica y los sistemas de numeración.

Es la gran puerta de acceso al planeta de las Matemáticas, por eso se enseñan desde los primeros años de educación primária de cualquier país. Sin estos cimientos bien asentados no se puede avanzar en nada de lo que sigue después.

Una de las características que te irás encontrando en el planeta de las matemáticas es la intercomunicación entre diferentes operaciones, básicamente porque una operación sea la inversa de la otra. Uno de los más "*escandalosos*" en Aritmética se dá entre la potenciación, la radicación y los logaritmos. Ahora me explico

Tenemos esta expresión

$$Base^{Exponente} = Potencia$$

$$B^E = P$$

La **Base** es un numero que se multiplica por sí mismo el número de veces que indica el **Exponente** y a su resultado, le llamamos **Potencia.** Un ejemplo típico es el siguiente y lo usaremos para explicar las tres operaciones que siguen:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Fácil ¿Verdad?. Bueno pues una operación tan sencilla es capaz de generar otras dos: La radicación y los logaritmos.

De entrada, la radicación es la operación inversa de la potenciación. Con ella, nos dan la Potencia y el exponente y nos piden que averigüemos la Base.

En el ejemplo anterior, que es $5^2 = 25$ la Raíz cuadrada[12] de 25 es 5 y se opera y escribe de esta guisa $\sqrt{25} = 5.$

Cuando hacemos una raíz cuadrada debemos preguntarnos ¿Hay algún número que, multiplicado por sí mismo, nos dé un resultado exacto o que se aproxime mucho al que aparece dentro del símbolo de la raíz?

Y la cosa no queda aquí, porque aún tenemos una tercera operación que son los logaritmos, que nos permiten despejar el exponente, cuando lo tenemos como incógnita. El nombrecito, que se las trae, viene del griego **λόγος** lógos 'razón' y **ἀριθμός** arithmós 'número'.

---

[12] Recuerda que en el símbolo $\sqrt{\ }$ se lee Raiz cuadrada, aunque no le pongamos un dos, cosa que sí nos toca hacer en cualquier otro tipo de Raíz, como por ejemplo la raíz cúbica, que como está elevada a 3, la escribimos como $\sqrt[3]{\ }$

¿Cómo se definen los logaritmos?

El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

Al igual que la radicación tiene el símbolo especial $\sqrt{}$ en el mundo de los logaritmos su símbolo característico es **Log**, abreviatura de **Log**artimo seguido de un subíndice (el número pequeñito que aparece junto a Log) y otro número que indica la potencia.

En nuestro ejemplo habitual esto sería así:

$$\log_5 25 = 2$$

Esto se lee "*Logaritmo en base 5 de 25 es igual a 2*"

Como soy consciente que te puedes haber perdido, te dejo un cuadro resúmen:

$$Base^{Exponente} = Potencia$$

$$B^{E} = P$$

Operación	¿Qué tengo? (datos)	¿Qué busco? (Incógnita)
POTENCIACIÓN	La BASE (B)y el EXPONENTE (E)	La POTENCIA (P).
RADICACIÓN	La POTENCIA (P) y el EXPONENTE (E)	La BASE (B)
LOGARITMO	La BASE (B) y la POTENCIA (P)	El EXPONENTE (E)

Y lo dejo aquí, puesto que sólo es una primera aproximación.

ARITMÉTICA DEL DIA A DIA. LA REGLA DE TRES.

La Regla de Tres es una utilísima aplicación de la Aritmética, que nos permite averiguar un dato, a partir de otros tres.

"(…) Desde entonces los problemas de regla de tres, no han dejado de estar presentes en los libros de aritmética, con un fundamento matemático que se relaciona con los conceptos de la teoría de las razones y proporciones de Euclídes. Así, por ejemplo aparece en el libro de Pérez de Moya (1562): "Dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se aya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero. Lo cual muestra Euclides en la decimosexta del sexto, a do dice: dadas 3 quantidades continuas proporcionales, para hallar la quarta multiplicarás la segunda por la tercera y partirás por la primera." (p. 220)"[13]

1	2	$x = \frac{2*3}{1}$
3	x	

Me ha sido de muchísima utilidad a lo largo de mi vida personal y profesional. Considero fundamental el dominarla a la perfección. Te voy a dar los pasos para que te salgan unas reglas de tres perfectas:

Paso 1:EL CUADRADO DE DATOS.

Denomino el cuadrado de datos a la distribución que toca hacer de los tres datos, de dos grupos diferentes, que nos aportan para poder averiguar el cuarto dato, que es la incógnita. Personalmente prefiero agrupar el cuadrado ordenando los datos por sus dos grupos, dejando siempre la X abajo y a la izquierda, tal que así.

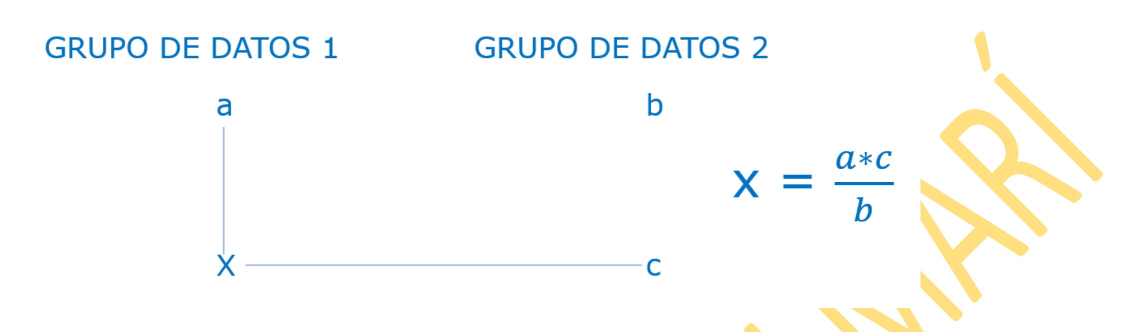
GRUPO DE DATOS 1	GRUPO DE DATOS 2
a	b
X	c

[13] Bernardo Gómez. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València. Los Ritos en la Enseñanza de la Regla de Tres

Paso 2:Operación si la relación entre los datos es directamente proporcional = Regla de 3 directa.

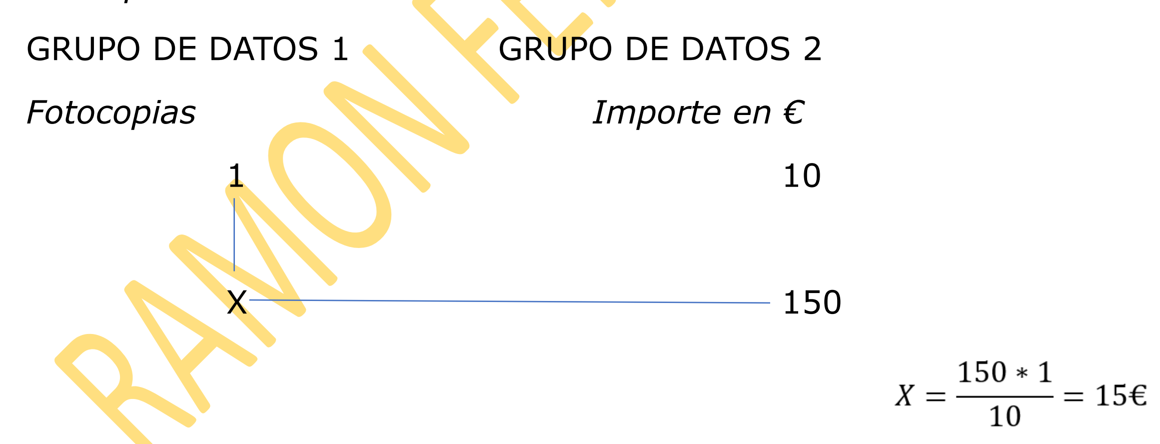
Aplicamos lo dicho por Euclides y que yo llamo "La Regla de la L":

En el punto donde se une los dos palitos de la L, lo hacemos coincidir con la X, para así unir los dos datos contiguos a la X y multiplicarlos entre ellos. Acto seguido, los dividiremos entre el dato más alejado de la X. Tal que así:



Veámoslo mejor con un Ejemplo:

Si 10 fotocopias nos cuestan 1€, ¿Cuánto nos costarán 150 fotocopias?



Como podéis ver, los grupos de datos son dos: Las fotocopias y el importe en €, así que hemos hecho dos columnas, una para cada grupo de datos. Y lo mismo, en cualquier regla de tres.

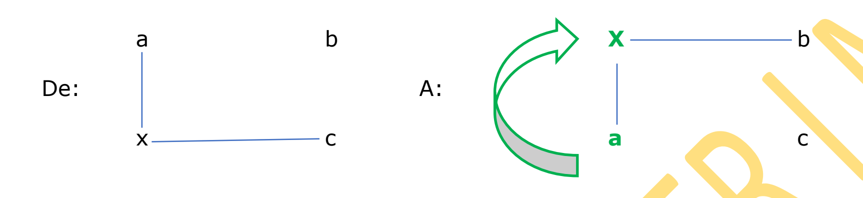
Paso 3: **Operación si la relación entre los datos es inversamente proporcional = Regla de 3 inversa.**

La peculiaridad de esta regla de tres inversa es que hay dos formas diferentes de resolverla:

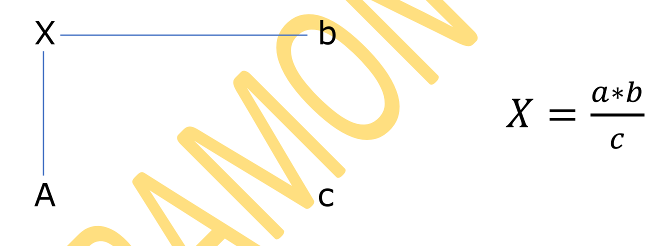
Hacemos los pasos 1 y 2, como de costumbre

Vía 3.1 Resolución ortodoxa, que implica hacer cambios:

Como la proporción es inversamente proporcional, **hay que INVERTIR el orden de los datos en la columna de la X,** es decir, subimos la **X** de abajo a arriba, y bajamos la **a**, de arriba abajo. Es importante no olvidar que, como hemos movido la X de sitio, también hay que actualizar las posiciones en la regla de la L, tal que así:



Es decir, elaboramos el cuadrado de datos como siempre, **pero hacemos el cambio de posiciones entre la X y a**:



$$X = \frac{a*b}{c}$$

Ejemplo: Tres amigas van de vacaciones a Almería y alquilan un apartamento en la playa. El alquiler les cuesta 420€ a cada una. ¿Cuánto tendrían que poner si se les añaden dos amigas más?

€	amigas
420	3
X	5

€	amigas
X	3
420	5

$$X = \frac{420*3}{5} = 252€$$

Vía 3.2: Vía rápida, sin cambios: **"No invertir los datos, Tapar la X con el dedo, poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo y operar como si fuera un quebrado gigante":**

Es la vía más sencilla de todas y la que yo recomiendo, ya que no tenemos que preocuparnos de recordar que hemos de invertir las posiciones de x y a. La cosa queda así.

Primera maniobra: Tapar la X con el dedo. Aquí lo simbolizaremos poniendo este punto

Segunda maniobra: Poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo.

Tercera maniobra: Operar como si fuera un quebrado gigante, es decir, multiplicamos entre sí los datos de arriba y dividimos entre el dato de abajo. La cosa quedaría así:

a	b
●	c

$$X = \frac{a * b}{c}$$

Aplicando esto al problema de las amigas, tenemos que:

€	amigas
420	3
●	5

$$X = \frac{420 * 3}{5} = 252€$$

Como podéis ver, el resultado es el mismo y nos ahorramos el peligro de olvidarnos de cambiar la X de sitio, un error que nos dará un resultado equivocado.

USA TU CEREBRO A LA ANTIGUA USANZA: Cómo calcular porcentajes rápidamente sin usar calculadora.

Imagina que te dán un folio A4, un bolígrafo y te piden que, con sólo esas herramientas, obtengas el 12% de 1500. Y encima, te dán apenas un minuto de tiempo para que respondas…

Antes que te dé un patatús te voy a enseñar la herramienta mental que hago servir yo, para hacer estos cálculos rápidamente.

Paso uno: Asumiendo que la cifra dada es el 100% de esa cifra (el 100% de 1500 es el própio 1500), obtengo primero el 10%, que es 150, puesto que sólo tengo que quitarle un cero por la derecha 1500.

Paso dos: Obtengo el 1% quitándole al 10% otro cero por la derecha 150 y me queda 15. También puedo coger el 1500 original y quitarle dos ceros de golpe, con lo que llego al mismo resultado, es decir 15.

Paso tres: Voy sumando esos resultados hasta obtener el porcentaje que me han pedido

¿Qué me han pedido? El 12% de 1500	
10% de 1500	150
1% de 1500	15
1% de 1500	15
TOTAL	180

Y ahora es cuando mi querida amiga Maria Primitiva me dice: "*A ver, Genio de la lámpara maravillosa, ese ejemplo es muy sencillo porque has tomado un número con ceros… Pero si te pido el 35% de 2355 ¿Cómo me lo resuelves?*".

Pues igual, pero en vez de ir quitando ceros, porque no los tengo, lo que hago es mover la coma de derecha a izquierda, un salto para obtener el 10% y dos saltos para el 1%, tal que así:

Si el 100% de 2355 es 2355, el 10% será 235,5 y el 1% será 23,55.

Como me piden el 35% de 2355 será cuestión de multiplicar el 10% por 3, el 1% por 5 y sumar ambas cifras:

235,5 x 3 (para obtener el 30%) + 23,55 x 5 (para obtener el 5%) y el resultado es **706,50 + 117,75 = 824,25.**

Uso de los paréntesis

Los paréntesis son usados en todas las ramas de la matemática, aprender a usarlos correctamente es indispensable para comprenderla.

Cuando realizamos operaciones entre números, **los paréntesis determinan el orden y la prioridad de unas sobre otras**. Por ejemplo, en la expresión, primero se deben realizar las operaciones de dentro de los paréntesis, y Luego debemos efectuar la resta. Por lo tanto, encontramos que el resultado de toda la expresión es cuatro:

$$\begin{aligned} &(9+2)-(1+6) \\ =&11-7 \\ =&4 \end{aligned}$$

No obtendremos el mismo resultado si hacemos las operaciones en otro orden, realicemos por ejemplo. Fíjate que los números y los signos de suma y resta están en el mismo orden que en el párrafo de arriba, lo único que está cambiando es la disposición de los paréntesis.
Notarás que hay unos paréntesis contenidos en otros, en este caso el paréntesis está dentro de uno más grande: debemos realizar primero los paréntesis más pequeños, es decir:

$$\begin{aligned} &(9+(2-1))+6 \\ =&(9+1)+6 \\ =&10+6 \\ =&16 \end{aligned}$$

Los paréntesis agrupan ciertos números para indicar cuáles son las operaciones que debes realizar primero, por esta razón son llamados **signos de agrupación**.

Anteriormente se usaban otros signos de agrupación tales como los corchetes o los paréntesis cuadrados, pero hoy en día solo se utilizan para agrupar operaciones los redondos: . Por esta razón verás que en libros de matemáticas antiguos aparecen expresiones como: que es igual a tener esto:

Ten en cuenta que, en su función de agrupar, **los paréntesis necesitan aparecer en parejas: uno abriendo y otro cerrando**. No tienen sentido expresiones como o .

$$((8-4)-11+3 \quad ✗$$

$$((8+4)-11)+3 \quad ✓$$

Para verificar que tengan sentido, **puedes contar cuántos paréntesis abren y cuántos cierran, debe haber siempre el mismo número**.

¿Y cuándo no hay paréntesis?

Es posible que encuentres expresiones del tipo $12 - 4 + 5 + 9 - 1$ o $10 - 5 + 14 + 2$, en las que aparecen **sumas y restas** consecutivamente. Existen varias formas de resolver este tipo de operaciones, te enseñaremos dos para que escojas cuál va más con tu estilo:

Primera forma

Empezamos de izquierda a derecha resolviendo las operaciones que vayamos encontrando, en el caso de $12 - 4 + 5 + 9 - 1$ procedemos así:

Paso 1:

Realizamos $12 - 4 = 8$, la expresión queda convertida en $8 + 5 + 9 - 1$.

Paso 2:

Seguimos con $8 + 5 = 13$, llegando a $13 + 9 - 1$.



Paso 3:

Continuamos con $13 + 9 = 22$, obteniendo $22 - 1$.

Paso 4:

finalmente resolvemos $22 - 1 = 21$. Por lo tanto $12 - 4 + 5 + 9 - 1 = 21$. En la siguiente imagen puedes observar el procedimiento completo:

$$
\begin{aligned}
&12-4+5+9-1\\
&=8+5+9-1\\
&=13+9-1\\
&=22-1\\
&=21
\end{aligned}
$$



Segunda forma

También podemos agrupar los términos que suman aparte de los que restan. **Recuerda que los números negativos representan deudas y los positivos tenencias**. Así, en la expresión $12-4+5+9-1$, los números $12, 5$ y 9 *agregan*, mientras que los números -4 y -1 *sustraen*. Por lo tanto, podemos proceder así:

Paso 1:

Agrupamos positivos con positivos y negativos con negativos: $(12+5+9)$ y $(4+1)$, obteniendo $(12+5+9)-(4+1)$.

Paso 2:

Sumamos los números agrupados en cada paréntesis: $12+5+9=26$ y $4+1=5$. Así se llega la expresión $26-5$.

Paso 3:

Luego calculamos la diferencia entre los resultados, le restamos las deudas a las tenencias: $26-5=21$. Observa el procedimiento completo:

$$\begin{aligned} &12-4+5+9-1 \\ &=(12+9+5)-(4+1) \\ &=26-5 \\ &=21 \end{aligned}$$

Como te puedes dar cuenta, los resultados de las operaciones fueron los mismos.

Aplicación de sumas y restas combinadas

En muchas ocasiones no te bastará simplemente con solo **sumar** o solo **restar**. Es necesario aprender cómo combinar la suma y la resta para resolver determinados problemas. Analicemos el siguiente:

Un autobús se desplaza por la ciudad, en su primera parada **recoge** 11 pasajeros, en la segunda se **suben** 2 y se **bajan** 7, en la tercera se **suben** 8 y se **bajan** 6. Al llegar a la **cuarta** parada, ¿cuántos pasajeros lleva el bus?

Para resolver este tipo de problemas se **asocian algunas acciones con la suma y otras con la resta.** Por ejemplo, podemos asociar que cuando el bus recoge pasajeros se realiza la operación **sumar**, y cuando de se bajan pasajeros del bus lo podemos asociar con la operación **restar**. Así, cuando traducimos el problema al lenguaje matemático obtenemos: $11+2-7+8-6$.

También podemos contar primero el número de personas que se suben: $(11+2+8)$ y después restarle el número de personas que se bajan: $(7+6)$. Obtenemos en ese caso la expresión: $(11+2+8)-(7+6)$.

$$11+2-7+8-6=8$$
$$\text{ó}$$
$$(11+2+8)-(7+6)=8$$

Nota que estas dos expresiones corresponden a los dos métodos explicados en la página **uso de los paréntesis**. Resolviendo cualquiera de estas obtenemos que al llegar a la cuarta parada en el autobús hay 8 personas.

Simplificación de expresiones con ley de signos

Estudiaremos ahora la forma correcta de resolver expresiones del tipo $3-(-4-5)+(-1-(-10))$ Observa una forma de hacerlo:

Paso 1:

Debemos resolver primero los **paréntesis** más pequeños. La **resta** $(-4-5)$ da como resultado -9 y según la ***ley de signos*** $(-(-10)=+10)$.

$$3-(-4-5)+(-1-(-10))$$
$$=3-(-9)+(-1+10)$$

Paso 2:

Siguiendo con la simplificación de los paréntesis que quedan: $-(-9)=+9$ y $-1+10=9$. Así, llegamos a la expresión $3+9+9$.

$$3-(-9)+(-1+10)$$
$$=3+9+9$$

Paso 3:

Una vez que se han simplificado todos los signos consecutivos, es fácil continuar. Realizamos la **suma** $3+9+9=21$. Observa el procedimiento completo:

$$\begin{aligned} & 3-(-4-5)+(-1-(-10)) \\ =& 3-(-9)+(-1+10) \\ =& 3+9+9 \\ =& 21 \end{aligned}$$

Observa que **solo usamos la *ley de signos* cuando encontramos los símbolos $+$ y $-$ consecutivos**. **Esta ley nunca se debe usar para resolver las sumas o las retas**. Estaría mal usarla para resolver $-3+4$.

Otro ejemplo

Simplifiquemos la expresión $-(-4-(5+(-2-1)-3))$:

En esta ocasión tenemos varios paréntesis ***anidados***, es decir, que están uno dentro del otro. Los resolvemos paso a paso **desde los más pequeños hasta los más grandes**.

Paso 1:

Comenzamos resolviendo los paréntesis más pequeños. Operamos $-2-1$, que da como resultado -3.

$$\begin{aligned} &-(-4-(5+(-2-1)-3)) \\ =&-(-4-(5+(-3)-3)) \end{aligned}$$

Paso 2:

Ahora el paréntesis más pequeño es (-3), pero este está precedido por un signo $+$. Debemos entonces usar la la ley de signos: *"**más por menos, menos**"*, obtenemos así: $+(-3)=-3$:

$$\begin{aligned} &-(-4-(5+(-3)-3)) \\ =&-(-4-(5-3-3)) \end{aligned}$$

Paso 3:



A medida que avancemos, debemos realizar las operaciones que vayan apareciendo, en este caso: $5-3-3=-1$.

$$
\begin{aligned}
&-(-4-(5-3-3))\\
&=-(-4-(-1))
\end{aligned}
$$

Paso 4:

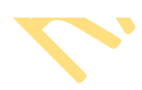
De nuevo, usando la ley de signos, $-(-1)=+1$, así resolvemos un paréntesis más:

$$
\begin{aligned}
&-(-4-(-1))\\
&=-(-4+1)
\end{aligned}
$$

Paso 5:

Recuerda realizar las sumas y las restas sin signos consecutivos a medida que van apareciendo: $-4+1=-3$:

$$
\begin{aligned}
&-(-4+1)\\
&=-(-3)
\end{aligned}
$$

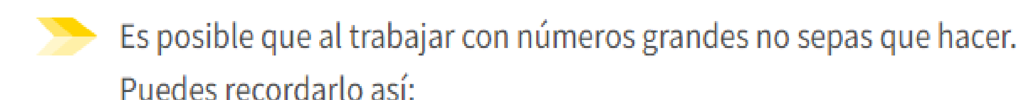


Paso 6:

Finalmente, aplicamos la ley de los signos a $-(-3)$: ***"menos por menos, más".*** Llegamos así a la respuesta final: 3. En la siguiente imagen puedes ver el proceso completo:

$$
\begin{aligned}
&-(-4-(5+(-2-1)-3)) \\
&=-(-4-(5+(-3)-3)) \\
&=-(-4-(5-3-3)) \\
&=-(-4-(-1)) \\
&=-(-4+1) \\
&=-(-3) \\
&=3
\end{aligned}
$$

Como te puedes dar cuenta, **aplicamos *la ley de signos* al encontrar signos** $+$ **y** $-$ **consecutivos** y operamos los números enteros según aparezcan **sumando** o restando como ya sabemos.


Es posible que al trabajar con números grandes no sepas que hacer.
Puedes recordarlo así:



- Si las dos cifras tienen el mismo signo, las cantidades se suman y el resultado queda con el signo que tienen las cifras: $-363-127=-490$ o $859+428=1287$.

- Si las dos cifras tienen signos diferentes las cantidades se restan y el resultado queda con el signo de la **mayor**: $-8949+4325=-4624$, o $9636-8736=900$.

ARITMÉTICA

EL ÁLGEBRA.

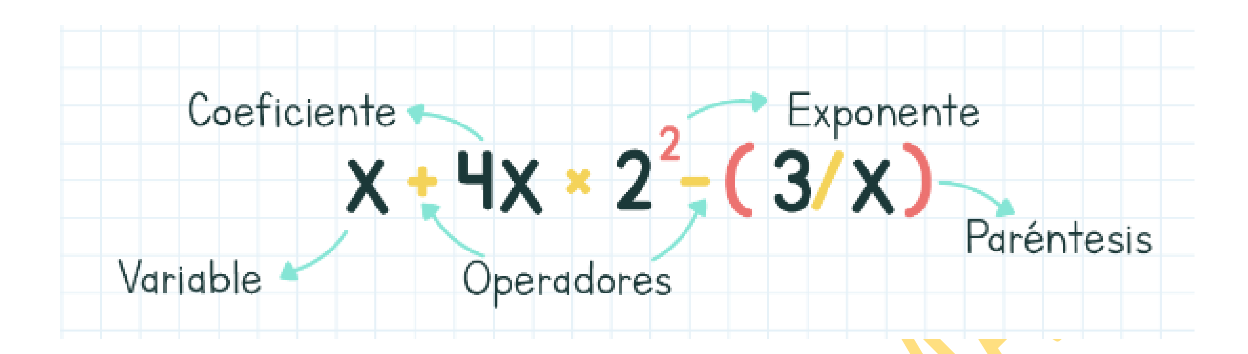
El álgebra se ocupa de trabajar con valores desconocidos, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Es la segunda àrea básica de las matemáticas y el segundo de los dos grandes pilares o cimientos en los que se aposenta todo el saber matemático. Su domínio es también inexcusable, o de lo contrário no se podrá avanzar en el conocimiento del resto de las áreas.

Para que os hagáis una idea de qué es el álgebra, os dejo un extracto de mi revista titulada "NOCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA PULPOS EN UN DESIERTO" que hallareis en mi repositorio de internet
https://archive.org/details/@ramon_ferrer_i_mari

*"(…) Incluye algunos símbolos que son comunes en álgebra, pero no en matemáticas básicas. La forma en que se escriben estas expresiones se llama **notación algebraica**.*

Esta notación incluye cinco componentes principales:

*a) **variables** o **incógnitas**,*
*b) **coeficientes**,*
*c) **operadores**,*
*d) **exponentes** y*
*e) **paréntesis**.*



Veamos qué es cada cosa:

***Variables** o **incógnitas**:*

*La **diferencia** entre **una variable y una incógnita** es que la **variable** es aquella que **pertenece a una expresión algebraica** y la **incógnita** es aquella que **pertenece a una ecuación**. Por lo tanto, la incógnita tendrá un respectivo valor numérico y la variable no siempre tendrá un valor numérico.*

Una variable o incógnita es una letra que se usa para representar un número. Por ejemplo, en la siguiente expresión

$$X+2=5$$

la variable X representa un número desconocido que al sumarle 2, nos dará 5.

Expresado como una pregunta sería: ¿a qué número puedes agregarle 2 para que dé 5?

Escribimos X porque, inicialmente, no sabemos cuál será ese número, pero lo podemos averiguar. Como sabemos que 2+3=5, nuestra variable debe ser 3 o, en otras palabras, X=3. Técnicamente lo resolveríamos así:

En X+2=5, pasamos el 2 al otro lado y nos queda X=5-2, con lo que obtenemos como resultado que X=3.

RECUERDA: Cada vez que desplazamos un término al otro lado del igual (=), toca cambiar el operador por su inverso. En cristiano: Si estaba sumando, lo pasaremos restando, y si estaba multiplicando, lo pasaremos dividiendo, o viceversa.

Coeficientes: *Que son un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, 3X = X + X + X, donde 3 es* ***coeficiente*** *de la variable X.*

Operadores*: Son los símbolos que nos indican la operación que debemos realizar. En estos apuntes, haremos servir los siguientes signos:*

- *Signo de Sumar* **+**
- *Signo de Restar* **–**
- *Signo de Multiplicación* ***** *(No usamos el signo x, para no confundirnos con la variable o incógnita, que la representamos como X)*
- *Signo de División* **/**

Exponentes: *Que indica cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo. Por ejemplo* 2^3 *está compuesto por el número 2, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos 2 por sí mismo, tres veces, o sea: 2 * 2 * 2 = 8. Si no aparece ningún exponente se sobreentiende que su valor es 1.*

Y podemos añadir que cualquier número (excepto el infinito y el 0) elevado a 0 es 1. Por ejemplo:

$12^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $4{,}56^0 = 1$

***Paréntesis**: Que se usan para agrupar partes de una expresión algebraica. En un problema debes resolver primero las expresiones que están dentro de ellos y acto seguido el resto. Ello significa que hay unas reglas que debes recordar y respetar escrupulosamente. **El orden de prioridad en la resolución** es el siguiente y lo puedes recordar, acordánte de la palabra **PEMDAS (P**ere **E**xplica **M**atemáticas a **D**iana, **A**miga de **S**andra):*

1. ***P**aréntesis. (….)*
2. **E**xponentes. 3^2
3. ***M**ultiplicaciones y **D**ivisiones. * /*
4. ***A**diciones (=Sumas) y **S**ustracciones (=restas). + -*

Veamos este ejemplo:

$$50 / 5*2 + (6+3*2) + 64/4^2 – 10$$

*1º <u>Paréntesis</u> (6+3*2): Dentro del Paréntesis, primero la Multiplicación 3*2 y luego la Suma ---> 3*2 = 6 + 6 = 12 y tras ello nos queda:*

$$50 / 5*2 + 12 + 64/4^2 – 10$$

2º <u>Exponentes</u> 4^2 *-→ 4 * 4= 16 y ahora nos queda:*

$$50 / 5*2 + 12 + 64/16 – 10$$

*3º <u>Multiplicaciones y Divisiones</u>: 5*2=10, luego 50/10 = 5 por un lado, y 64/16=4, por el otro y nos queda:*

$$50 / 10 + 12 + 4 – 10$$

$$5 + 12 + 4 – 10$$

4º <u>Sumas y Restas</u>:

$$5 + 12 + 4 – 10 = \underline{\mathbf{11}} \qquad (…)”$$

GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y TRIGONOMETRÍA.

La geometría euclídea es la parte de la geometría que estudia los objetos o figuras y sus relaciones en un espacio donde se cumplen los cinco postulados de Euclides y las cinco nociones comunes. Estos postulados y nociones comunes fueron recogidas en un tratado de geometría escrito por Euclides de Alejandría, que constaba de trece libros y que se decía los Elementos.

Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.

5. Si una recta corta a otras dos formando, a un mismo lado de la secante, dos ángulos internos agudos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están dichos ángulos

Las cinco nociones comunes son:

1. Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí.(la propiedad transitiva de una relación euclidiana).
2. Si a cosas iguales añadimos cosas iguales, las totales son iguales.(La propiedad de la suma de la igualdad).
3. Si a cosas iguales quitamos cosas iguales, los restos son iguales.(Propiedad de igualdad de la resta).
4. Las cosas que se superponen son iguales.(propiedad reflexiva)
5. El todo es mayor que la parte.

La Trigonometría[14] es la parte de las matemáticas que se encarga de estudiar y medir los triángulos, las relaciones entre sus ángulos y lados, y sus funciones trigonométricas deseno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

La aplicación de las funciones trigonométricas en la física, astronomía, telecomunicaciones, náutica, ingeniería, cartografía, entre otros ámbitos, es lo que las dota de relevancia, pues permiten calcular distancias con precisión sin tener que, necesariamente, recorrerlas.

Sabiendo esto, la importancia de la trigonometría radica en las diversas aplicaciones que tiene para, por ejemplo:

- Calcular la distancia entre dos puntos, de los cuales uno, o incluso ambos, son inaccesibles.
- Calcular de forma precisa distancias y ángulos de inclinación, siendo de gran utilidad para la ingeniería civil.
- Calcular la altura de un punto en pie que puede ser, también, inaccesible.

[14]https://www.ferrovial.com/es/stem/trigonometria/

Se entiende por funciones trigonométricas a la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo. A partir de un triángulo que presente un ángulo recto de 90 grados se pueden determinar tres elementos fundamentales:

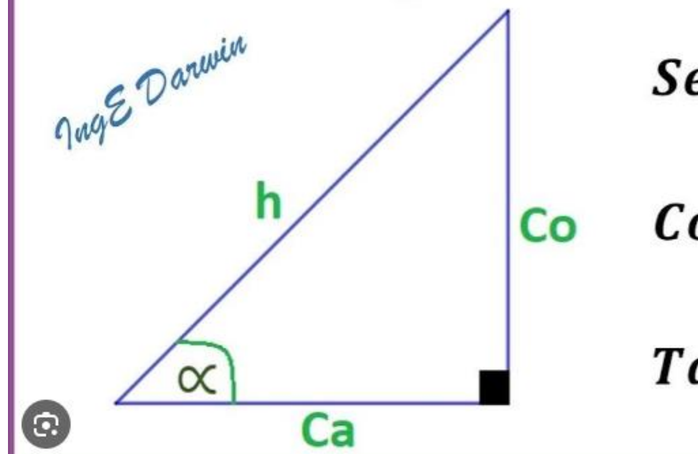
- Ángulos: área del plano que se encuentra entre dos semirrectas con origen común. Se trata de la amplitud del arco de una circunferencia, centrada en el vértice y delimitada por sus lados.
- Catetos: resto de lados que conforman un triángulo. Se pueden clasificar en cateto opuesto (que se encuentra del lado opuesto o en frente del ángulo estudiado) y el adyacente (que se encuentra junto al ángulo analizado).
- Hipotenusa: lado de mayor longitud de un triángulo y está opuesto al ángulo recto.

Entendidos estos tres conceptos fundamentales, las funciones trigonométricas son:

- Seno: razón que existe entre el cateto opuesto del ángulo de estudio y la hipotenusa.
- Coseno: división del cateto adyacente del ángulo analizado entre la hipotenusa del triángulo.
- Tangente: razón que existe entre el l opuesto y el cateto adyacente del triángulo. Se expresa como la división del seno entre el coseno.

Cada función trigonométrica tiene su razón recíproca, es decir:

- Secante: razón recíproca del coseno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente.
- Cosecante: razón recíproca del seno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto.
- Cotangente: razón recíproca de la tangente que consiste en la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto.



Fuente YouTube. IngEDarwin.

Cosecante: Es la inversa del seno, en este caso $\frac{h}{Co}$

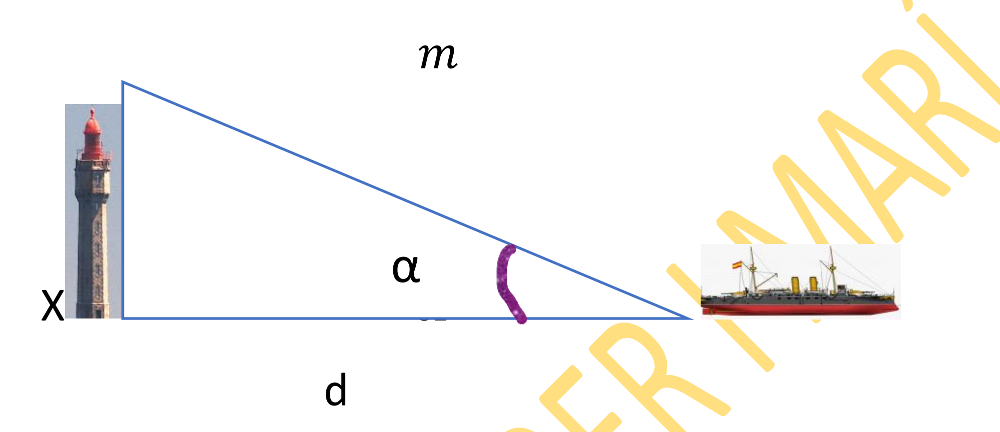
Secante: Es la inversa del coseno, en este caso $\frac{h}{Ca}$

Cotangente: Es la inversa de la tangente, en este caso $\frac{Ca}{Co}$

Peligro: Por las similitudes entre Seno y Secante, y entre Coseno y Cosecante, existe la posibilidad de liarse con esos nombres. Para evitarlo, imagina a una señora con una bayeta absorbente, recogiendo agua del mármol de su cocina, y piensa: "*La señora* ***Coseno*** *usa una bayeta muy* ***Secante***".

Veamos una aplicación práctica de la trigonometría:

Desde el puente de mando del buque apuntan un telémetro láser hacia la cúpula del faro. La medición indica que la distancia m entre el buque y la cúpula del faro es de 959 metros y el ángulo $\propto$ muestra una lectura de 4,01 grados. Con esos datos, hay que averiguar la altura del faro X y la distancia, a nivel del mar, entre el buque y el faro.



Siendo el ángulo α tenemos que la hipotenusa es m, el cateto opuesto será X y el cateto adyacente, d.

- Para averiguar la altura del faro X usaremos la fórmula del Seno:

Seno 4,01 grados = $\frac{X}{959}$ Seno 4,01 grados · 959 = X

Seno 4,01 grados = 0,069 · 959 = **67,06 metros.**

- Para averiguar la distancia (d) a nivel del mar, entre el buque y el faro usaremos la fórmula del Coseno.

Coseno 4,01 grados = $\frac{X}{959}$ Coseno 4,01 grados · 959 = X

Coseno 4,01 grados = 0,069 · 959 = **956,65 metros.**





CAPÍTULO 1 Conceptos básicos

CAPÍTULO 2 Ángulos

CAPÍTULO 3 Rectas perpendiculares y paralelas

CAPÍTULO 4 Triángulos

CAPÍTULO 5 Cuadriláteros

CAPÍTULO 6 Polígonos

CAPÍTULO 7 Transformaciones

CAPÍTULO 8 Circunferencia y círculo

CAPÍTULO 9 Perímetros y superficies

CAPÍTULO 10 Cuerpos geométricos, áreas y volúmenes

CAPÍTULO 11 Funciones trigonométricas

CAPÍTULO 12 Funciones trigonométricas para ángulos notables

CAPÍTULO 13 Representación gráfica de las funciones trigonométricas

CAPÍTULO 14 Identidades y ecuaciones trigonométricas

CAPÍTULO 15 Triángulos rectángulos

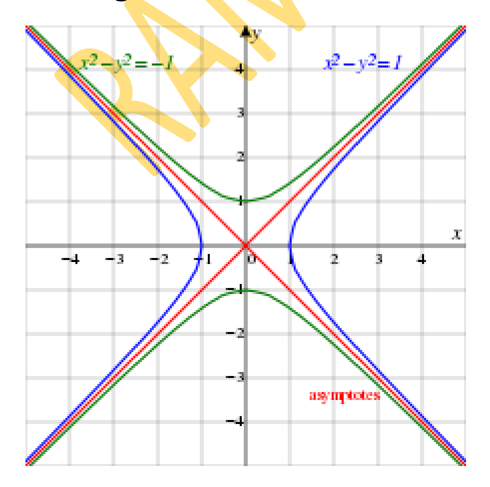
GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Don Agustín Larrauri Pacheco, Profesor Numerario de Matemáticas del Instituto Politécnico de Bilbao, hace una definición muy clara de lo que es la Geometría analítica, en su libro de Matemáticas F.P.2-3º, al decir que:

"*La Geometría Analítica tiene por objeto el estudio de la Geometría, mediante procedimientos de cálculo propios del Análisis Matemático".*

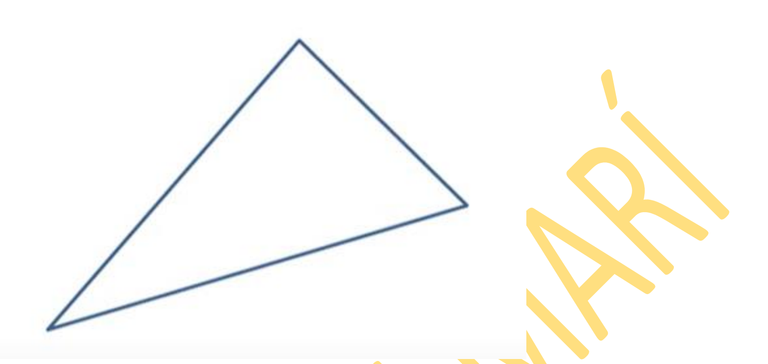
Con ello se logró que dos disciplinas matemáticas como son la Geometría y el Álgebra, encontrasen una relación entre ellas. No olvidemos que, hasta principios del Siglo XVII se consideraban completamente independientes.

Dicho de otra manera, la geometría analítica es una rama de las matemáticas dedicada al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos, tales como áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación, etcétera. Para ello emplea técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra permitiendo, además, la representación e interpretación geométrica del álgebra.



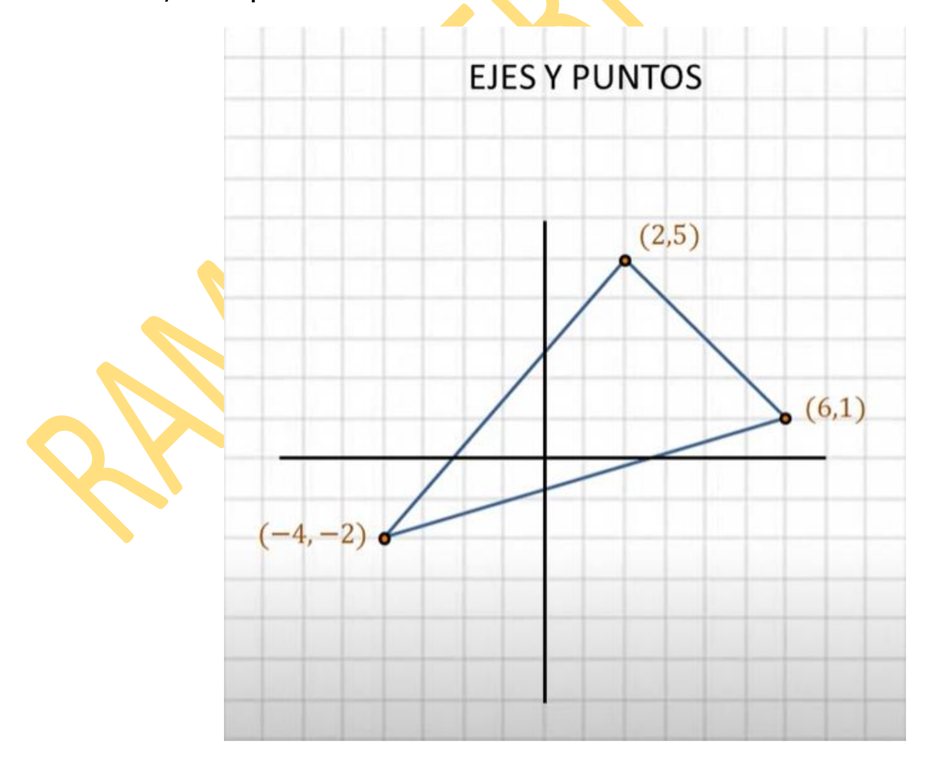
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Drini-conjugatehyperbolas.png

En la geometría tradicional nos dedicamos a tomar una hoja de papel y dibujar una figura, por ejemplo un triángulo, “por las bravas”, tal que así:



Autor: Captura de pantalla del video de “pildoras matemáticas” 01 Ejes y puntos. https://www.youtube.com/watch?v=vozdtTj2D2U&list=PLwCiNw1sXMSAMNnvvsBGpp778cpwcoDuV

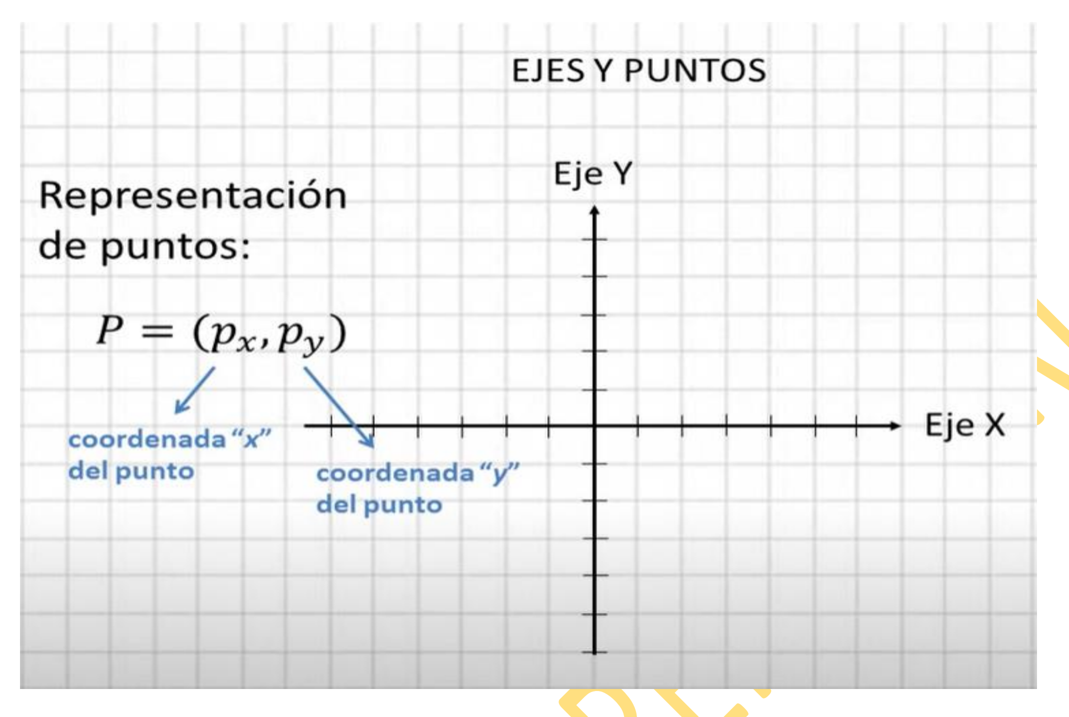
Pero al aplicarles los ejes de coordenadas llamados plano cartesiano, podemos situarlos espacialmente, al ir referenciados en el citado eje cartesiano, tal que así:



Autor: mismo que el anterior.

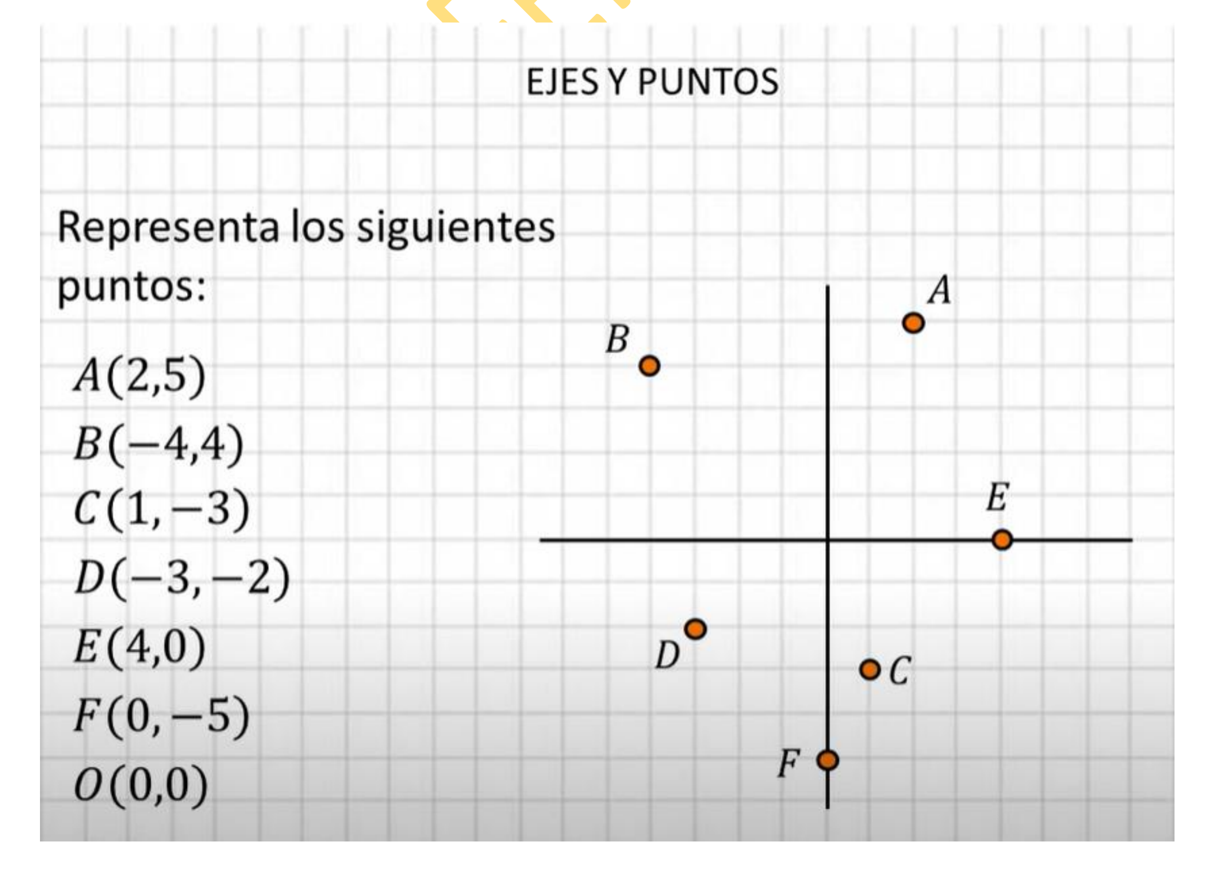
Ahora sabemos que los vértices ocupan los puntos (-4,2), (6,1) y (2,5) referidos al eje de coordenadas.

Los ejes cartesianos vemos que se componen de una línea horizontal llamada Eje X, al que se le cruza en su punto medio una línea vertical llamada Eje Y. Determinamos una distancia entre punto y punto y se replica en ambos ejes y en ambas direcciones, tal que así:

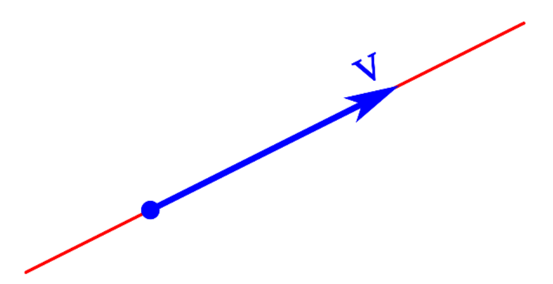


Autor: mismo que el anterior.

De este modo, podemos ubicar cualquier punto referenciándolo por el par ordenado que nos indica el punto x y el punto y.

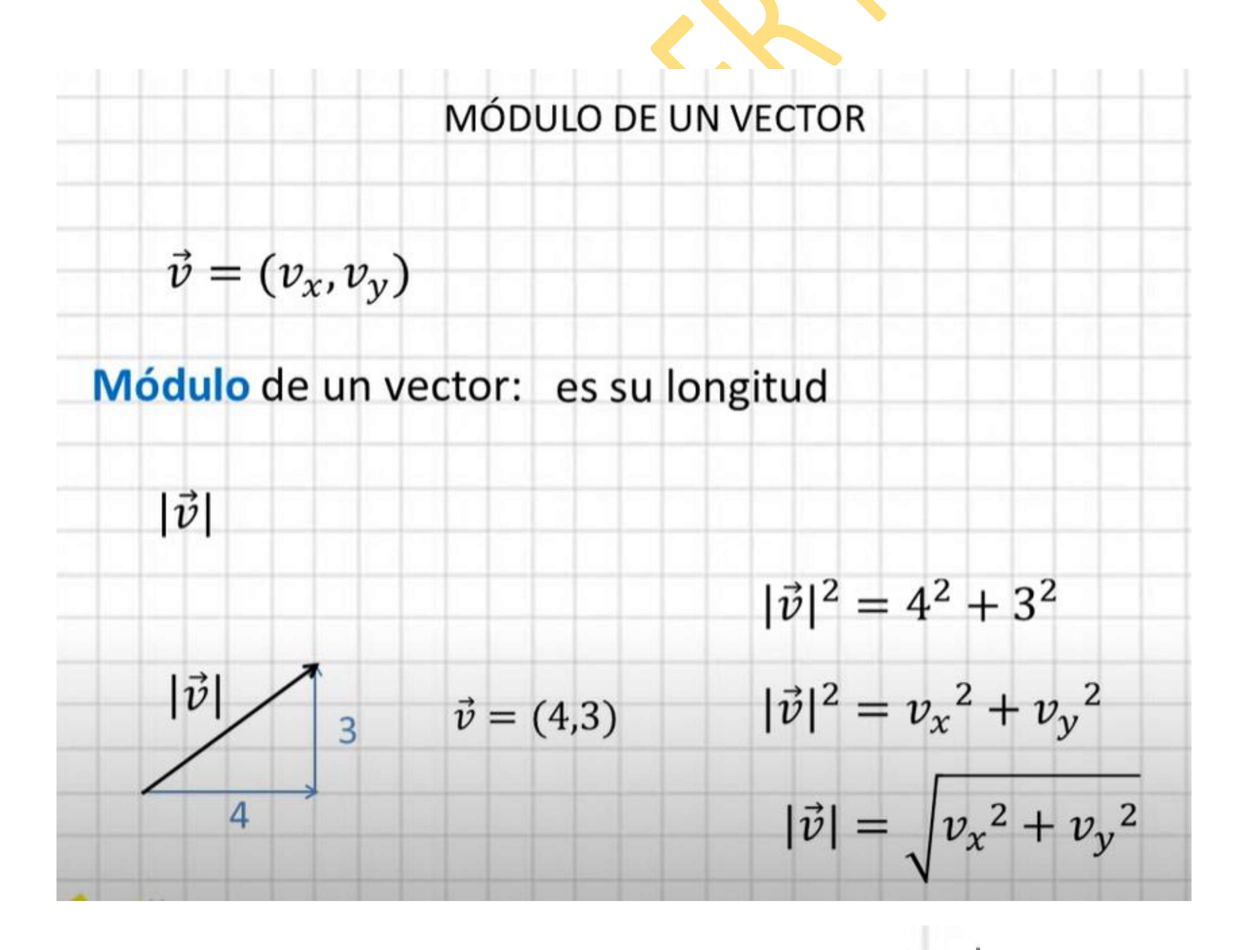


El siguiente concepto fundamental és el de vector, que en Matemáticas y Física, es cualquier ente matemático que se puede representar mediante un segmento de recta orientado dentro del espacio euclidiano. Representado gráficamente sería esto, sacado de Wikipedia.

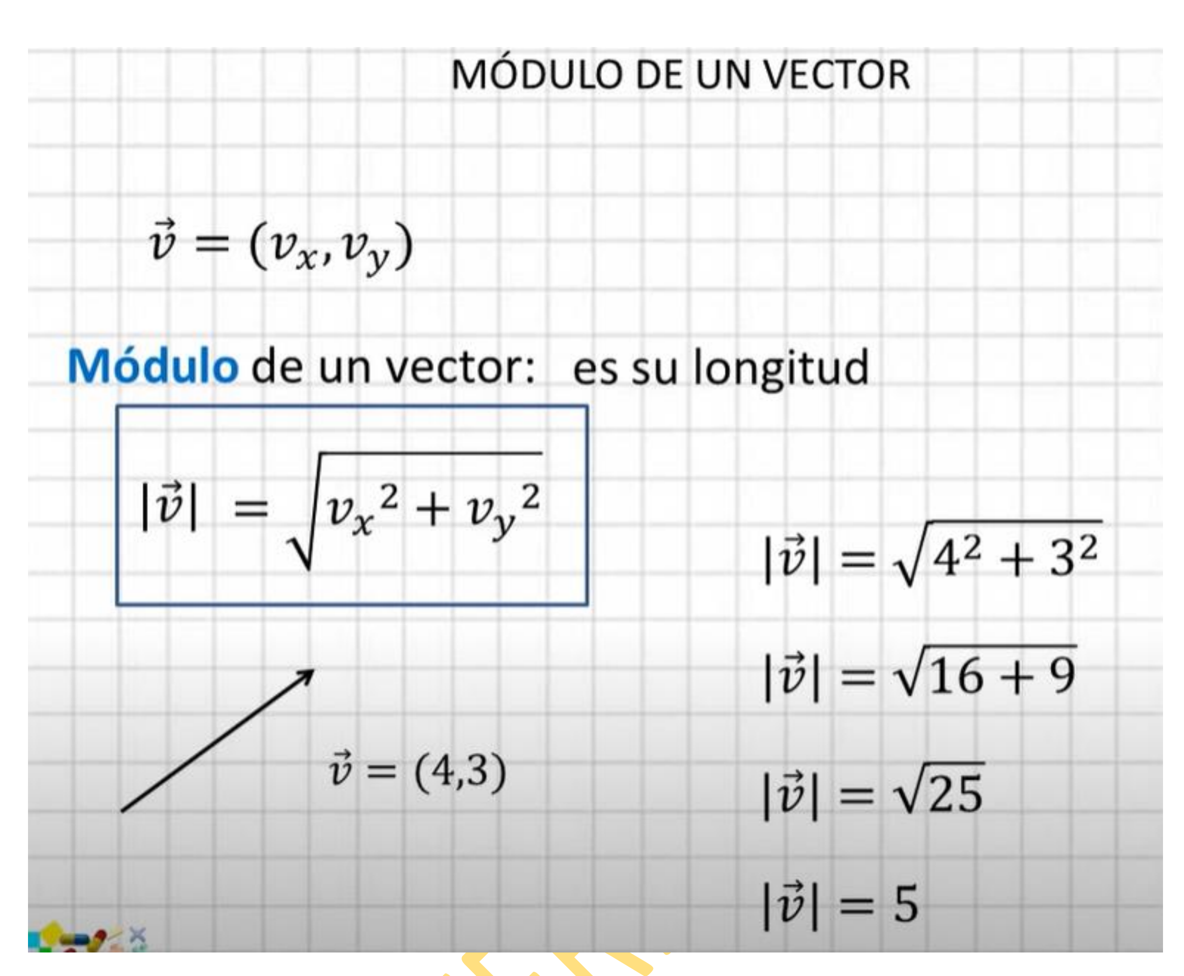


Autor: Dnu72. Wikipedia.

La longitud de un vector se llama módulo y se obtiene, por Teoréma de Pitágoras ("Pitty", para los amigos), calculando la raiz cuadrada del cuadrado de sus coordenadas.



Se compone de v_x que es la dirección horizontal y v_y que nos dá la dirección vertical.



Autor: Captura de pantalla del video de "píldoras matemáticas"

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Solamente voy a hacer una introducción a la recta y a los vectores, muy suscinta. Recordad que la geometría analítica incluye la circunferencia, la parábola, la elise, la hipérbola y las cónicas.

ECUACIONES DE LA RECTA

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$$\vec{v} = (3,2)$$

Una recta queda determinada si conocemos su dirección y un punto por el que pasa

- Si conocemos 2 puntos, podemos obtener su dirección

- Si conocemos su pendiente, podemos obtener su dirección

La geometría analítica de la recta se puede condensar en estas 6 ecuaciones:

ECUACIONES DE LA RECTA

Ecuación vectorial: $(x, y) = (p_x, p_y) + (v_x, v_y) \cdot t$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = p_x + v_x \cdot t \\ y = p_y + v_y \cdot t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$

Ecuación punto-pendiente: $y - p_y = m \cdot (x - p_x)$

Ecuación explícita: $y = mx + n$

Ecuación general: $Ax + By + C = 0$

Y lo dejo aquí, mejor id al canal “Píldoras Matemáticas” u otro que os resulte fácil de entender.




EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y EL CÁLCULO INTEGRAL.

Nuestra última parada en el planeta de las matemáticas la haremos en los Cálculos Diferencial e Integral.

Los agrupo en este apartado, por dos razones diferentes: como ya expliqué en la página 5, algunos matemáticos lo hacen bajo los nombres de *Cálculo Infinitesimal* y de *Análisis Matemático.*

La otra razón es que son métodos especulares, es decir que uno es el inverso del otro.

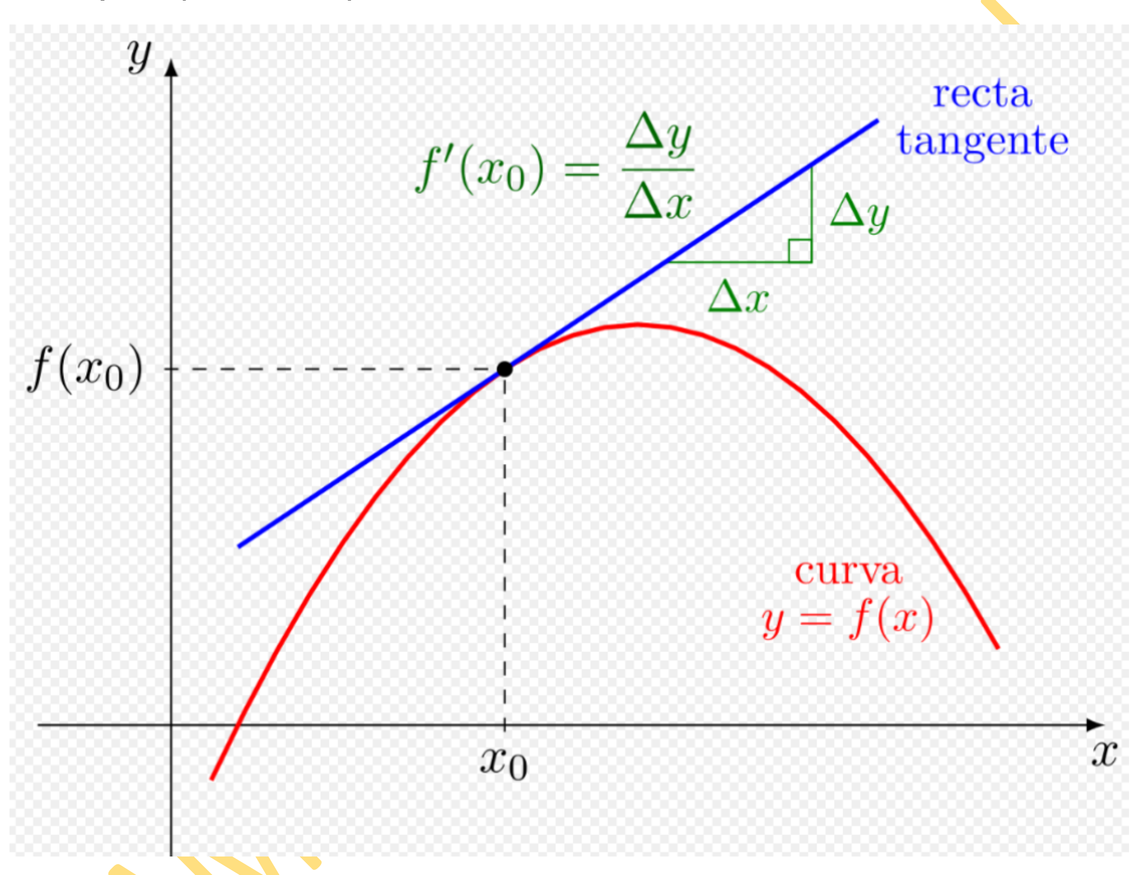


Foto: Ministerio de Defensa. Figura acrobática "El Espejo" realizada por la patrulla Àguila, formada por profesores de la Academia Militar del Aire, del Ejército del Aire Español.

Antes de poner el índice de estas dos materias os vuelvo a dar una pequeña clase, que también procede de mi revista titulada "NOCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA PULPOS EN UN DESIERTO" que hallareis en mi repositorio de internet https://archive.org/details/@ramon_ferrer_i_mari

DERIVADAS E INTEGRALES: HERRAMIENTAS INVERSAS.

Una derivada es una herramienta matemática que nos describe el ritmo de cambio de cualquier función en un determinado punto o instante. Por eso se habla del valor de la derivada de una función *en un punto dado*. Esto sirve a una generalidad de usos en Física, en ingeniería (rama del conocimiento que es la aplicación práctica de la Física), arquitectura y otros muchos.



Autor: Cristian Quinzacara. Representación gráfica de una función. La derivada de la función en el punto marcado es equivalente a la pendiente de la recta tangente. Wikipedia.

Poniéndonos muy puristas, tiramos de definición y decimos:

"El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es, a su vez, la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto".

A ver estoy empezando a ponerme repelentemente abstracto, así que vamos a dar un ejemplo procedente de una rama de la Física que se llama Cinemática.

Nos salimos al balcón de casa y, sacando a pasear nuestra *vena macarra,* tiramos a la calle la horterada de jarrón que nos regaló la tía Romualda, las navidades pasadas... Eso sí, previamente, nos aseguramos de no darle en plena cabeza a ningún pobre peatón.

Hasta que la odiosa pieza de porcelana termine hecha añicos sobre la acera, en su camino hacia la perdición, el jarrón no sólo irá ocupando diferentes alturas respecto del tiempo, sino que, además, lo hará con una velocidad creciente, es decir que irá cayendo cada vez más rápido. Es decir, que tenemos dos elementos diferentes, íntimamente ligados entre sí, que son la velocidad y la aceleración.

A esto se le define como *caída libre* que, en cinemática, es un caso particular del llamado *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*

Eso lo podemos describir como la altura respecto del tiempo, con la función: **y(t)** siendo **y** la altura y **t**, el tiempo.

La **velocidad** la describiremos con la derivada $\frac{dy}{dt}$ es decir, la derivada de la altura respecto del tiempo.

Si queremos definir la **aceleración**, que es el ritmo del incremento de la velocidad a la que cambia la velocidad del jarrón respecto del tiempo, haremos la **segunda derivada (*)**, es decir, volvemos a derivar respecto del tiempo:

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$ 2ª Derivada 1ª Derivada

Con lo que nos sale el siguiente desarrollo:

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d\cdot dy}{dt\cdot dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$$ = 9,8 metros/segundo^2

(*) Para una función f(x)= x^3 su primera derivada es f'(x)= $3x^2$ y su segunda derivada será f''(x)=**6x**. No os preocupéis, que la mecánica operativa de las derivadas viene a partir de la página siguiente.

EL CÁLCULO DIFERENCIAL: LOS CUATRO PASOS.

En una derivada tenemos tres partes:

1) La **variable**, que es una letra que se usa para representar un número.
2) El **exponente,** que indica cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo y
3) El **coeficiente**, que es un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, 3X = X + X + X, donde 3 es **coeficiente** de la variable X.

En la derivada de un polinomio, el resultado será un polinomio con un grado una unidad inferior al polinomio original.

Pero no lo podemos hacer por las bravas, hay que seguir 4 pasos para lograrlo. Empecemos:

Primer Paso: La función más básica de todas.

Sea X^3 que está compuesta por la variable o incógnita X, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos X por sí misma, tres veces, o sea: X * X * X.

Para bajarla en grado, toca hacer dos maniobras:

Maniobra 1: Hay que pasar el exponente a la posición adelantada de la X y dejarlo multiplicando a ésta, es decir, que hemos de pasar de X^3 a **3X**.

Maniobra 2: el grado sólo puede reducirse en una unidad, por lo tanto, tenemos que respetar el grado anterior, reducido el exponente en una unidad, es decir, pasar de X^3 a X^2.

Y finalmente nos queda $3x^2$.

Más ejemplos de lo mismo:

$X^8 \rightarrow 8X^7$ $X^5 \rightarrow 5X^4$ $X^3 \rightarrow 3X^2$

$X^9 \rightarrow 9X^8$ $X^6 \rightarrow 6X^5$ $X^4 \rightarrow 4X^3$

Segundo Paso: La función viene acompañada de un número.

En este segundo caso nos encontramos que la función viene acompañada de un número. Lo haremos casi igual, en 3 pasos:

Sea $6X^5$

Paso 1: Respetando ese número, bajaremos el exponente delante de la X

$(5) * 6X^5$

Paso 2: Lo multiplicaremos por el número. (5)*6= 30X

Paso 3: Acto seguido, reduciremos el grado: $30X^4$

$6X^5 \rightarrow 30X^4$

Otros ejemplos:

$3X^4 \rightarrow (4) *3X^4 \rightarrow 12X^3$

$5X^7 \rightarrow (7) *5X^7 \rightarrow 35X^6$

Tercer Paso: Cuando tenemos solo la X, por la primera ley de exponentes, la derivada de X es igual a 1.

Empecemos dando un listado con las ocho leyes de exponentes y sus ejemplos.

De todas las tablas que circulan por Internet, ésta me parece la mejor: La columna de la izquierda tiene la fórmula genérica, mientras que a la derecha se da un ejemplo práctico de su aplicación.

1 $a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2 $a^m\, x\, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5 $(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7 $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$	$(2\, x\, 3)^2 = 2^2\, x\, 3^2$
8 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Fuente: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

X ➡ $1*x^0$ ➡ 1*1 = 1 8X ➡ $8*x^0$ ➡ 8*1 = 8

Cuarto Paso: La derivada de un número siempre es igual a 0. No importa si ese número es 5 o 5.000.000.000.000 (5 Billones). Se le llama "*CONSTANTE*", porque nunca cambia: Un 5 siempre es un 5, un 29 siempre es un 29. Se le representa como una "*C*" o una "K"*.* El por qué lo veremos enseguida*.* De momento quedaos con este ejemplo:

$$y = 5X^3 + 2X^2 - 5X + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 15X^2 + 4X - 5 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 15X^2 + 4X + C$$

Aquí es donde toca introducir un concepto nuevo llamado *Primitiva.* Y no, no estamos hablando de una mujer que perteneció al grupo evolutivo de los Cromañones o de mi estimada, simpática e inteligentísima amiga, María Primitiva Sánchez Martínez, a quien la vida llevó a vivir al Principado de Asturias y a la que mando un cariñoso abrazo.

A riesgo que algún matemático fundamentalista me parta la cara, dejo de lado la definición ortodoxa[15] (que cuesta Dios y ayuda entender a la primera) y paso a explicarlo en un castellano sencillito:

Si tenemos *varias* funciones que, al derivarlas, coinciden en el mismo resultado, a esas funciones las llamaremos *PRIMITIVAS*[16]*.* Y ahora veamos un par de ejemplos:

---

[15] Sea f(x) una función real de variable real definida en un intervalo cerrado [a, b]⊆R. Se llama función primitiva de f(x) a otra función F(x) cuya derivada es f(x) en dicho intervalo.

[16] SPOILER: A ese conjunto de primitivas se le llama INTEGRAL INDEFINIDA. Pero ya llegaremos a eso.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ = $20x^3$ tiene varias funciones que, al derivarlas, nos dan esa misma derivada, a las que llamaremos Primitivas.

DERIVADA	FUNCIONES PRIMITIVAS
$20x^3$	$5x^4$
	$5x^4$-7
	$5x^4$+2
	$5x^4$+30

De manera que podemos definir una forma genérica de escribir a todas esas múltiples funciones que, al derivarlas, nos dan la derivada $20x^3$. Esa forma es:

$$5x^4+C$$

Si aplicamos lo mismo a la función inicial de este apartado, tenemos que las primitivas de la derivada $15X^2 + 4X + C$, pueden ser las siguientes, entre las infinitas combinaciones que pueden darse, sin importar cuál sea el número final:

- $5X^3$+ $2X^2$- 5X + 10
- $5X^3$+ $2X^2$- 5X – 7
- $5X^3$+ $2X^2$- 5X + 5.000.000.000.000
- $5X^3$+ $2X^2$- 5X – …

Hecho este importante inciso, para explicar de dónde puñetas viene la constante C, volvamos a las derivadas.

MECÁNICA DE RESOLUCIÓN DE LAS DERIVADAS.

Vamos a resolver una derivada de manera lenta, que se vean todos los pasos que toca hacer para resolverla:

$$y = 12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 * 12X^4 - 4*3X^3 + 3*8X^2 - 2*2X^1 + 5*1\,(X^0) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5 - 0$$

Y aunque con este aspecto está intrínsecamente correcta, por costumbre, cuando tenemos una constante (10, en este caso) cuya derivada es 0, éste 0 no se pone, con lo que el resultado final de la derivada, así en plan bonito, y con la ropa de los domingos, sería:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$$

🤔 Dudas de principiante: Si la derivada de un número es 0 ¿Por qué no eliminamos del resultado final el 5, además del 0? Pues precisamente por eso, porque el 5 final procede de derivar 5X. Ese 5 sólo desaparecerá si hacemos la segunda derivada, es decir, si derivamos la derivada que hemos obtenido.

Veámoslo:

1ª Derivada o derivada que hemos obtenido: $60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$

2ª Derivada: $60 * 4X^3 - 12*3X^2 + 24*2X - 4.$ → $240X^3 - 36X^2 + 48X - 4.$

INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES

Vamos a dar una definición ortodoxa y luego ya lo *traduciremos* a un castellano asequible para todos los públicos:

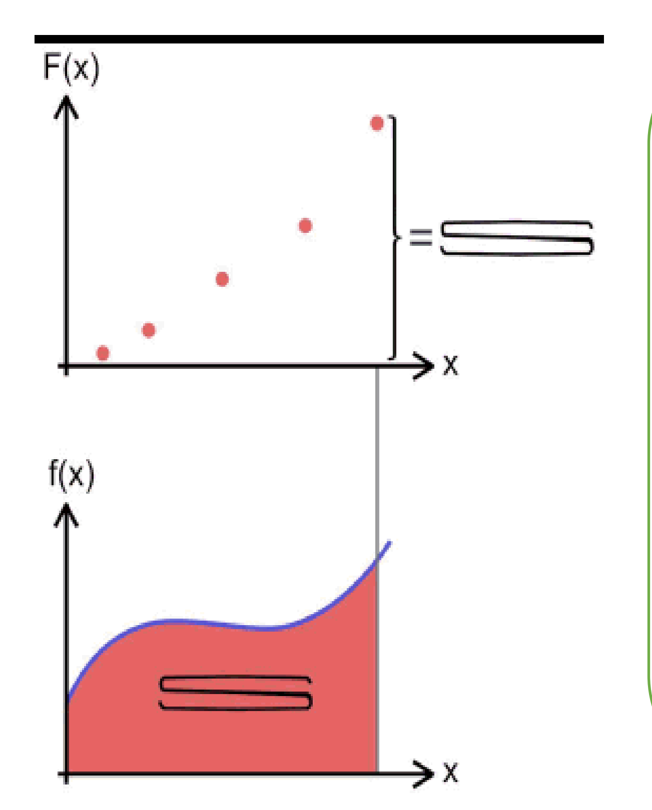
"*El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación. Es muy común en la ingeniería y en la ciencia; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución*".

Esta definición queda muy molona pero lo real es que, aún no nos hemos sumergido en las *partes pornográficas* del tema y, ya nos empieza a sonar a Chino Cantonés. De todos modos, ya nos da una primera pista cuando nos habla de *antiderivación.* Luego volveremos a este punto.

De momento quédate con la película que derivada e integral son imágenes especulares.

Una Integral, dicho a lo bruto y sin anestesia ni nada, es una herramienta matemática que nos sirve para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva.

Algo así:



Observa que en este dibujo aparecen dos representaciones gráficas:

La de arriba se llama F(x) y representa una serie de 5 puntos. Para obtener esos puntos usamos DERIVADAS.

La de abajo se llama f(x) y representa una figura geométrica cuyo lado superior es justamente la unión de los 5 puntos de la figura superior. La zona de color rosa es el área comprendida entre la línea de puntos y los ejes f(x) y x. Para calcular esa área usaremos INTEGRALES.

En resumen: La DERIVADA es respecto de un punto, mientras que la INTEGRAL lo es respecto de un área.

Autor: Kubrikov. Instituto Conjunto de Altas Temperaturas de la Academia de Ciencias de Rusia. Tomado de Wikipedia.

¿Y esto para qué narices sirve?

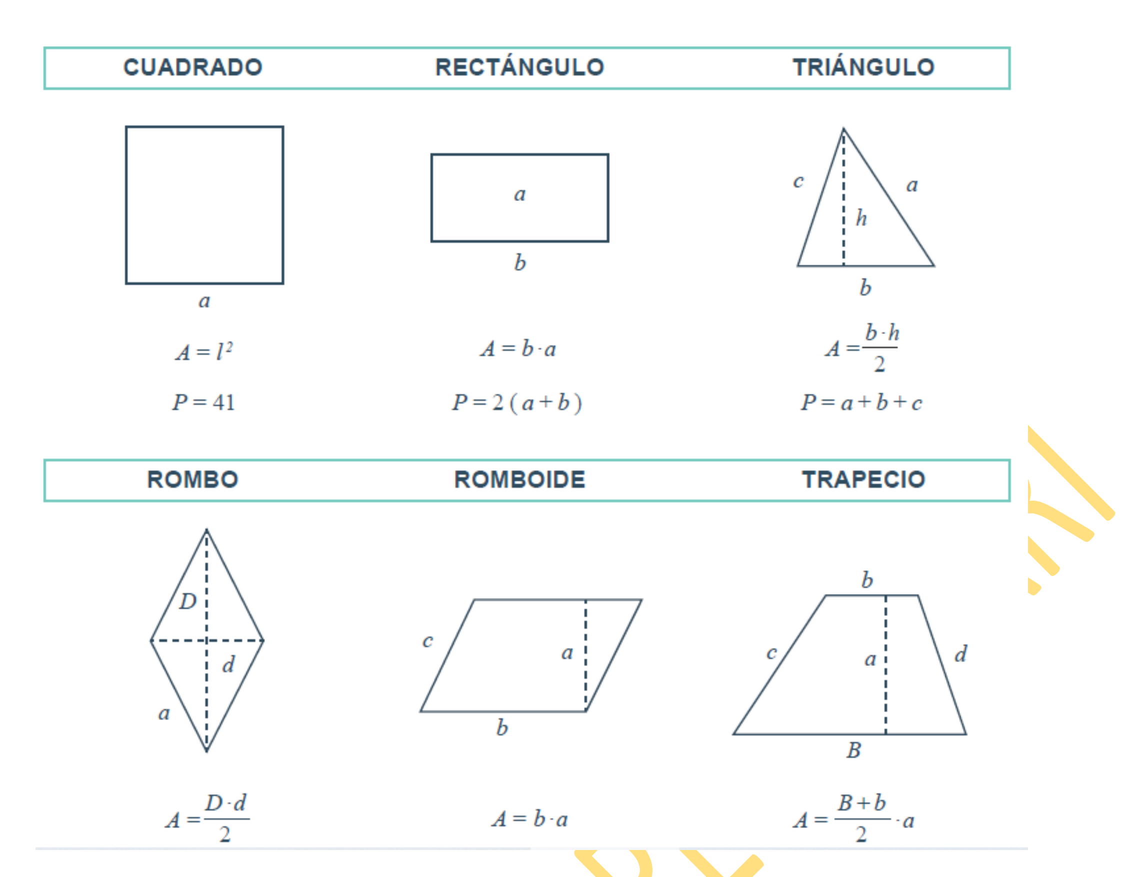
Cuando queremos calcular el área de una superficie geométrica cuyos lados son siempre una recta, disponemos de una serie de sencillas formulas trigonométricas.

Acto seguido os dejo un recorte de un PDF creado por el Gobierno de Canarias sobre Fórmulas de áreas y perímetros de figuras geométricas planas.

Como podéis ver, los cálculos son puramente aritméticos y más simples que la electrónica de un botijo:



Foto: Evocalo.com



Fuente: Recursos pedagógicos en línea del Gobierno de Canarias.

El problema es que esas formulas son inútiles para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva. Pongamos un ejemplo: Imagina que somos una empresa constructora y tenemos dos clientes que nos piden que les construyamos una piscina.

El cliente A nos pide la típica piscina rectangular de 5 metros de largo por 4 de ancho y 2 metros de profundidad. Su superficie es de 5 * 4 = 20 metros cuadrados y su capacidad es de 5 * 4 * 2= 40 metros cúbicos[17] de agua.

Hasta aquí, todo bien.

[17] Un metro cúbico equivale a 1.000 litros. Por lo que estamos hablando de 40.000 litros de agua.

El cliente B es el amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, forofo de la música rock y nos pide que la piscina tenga la forma de su guitarra eléctrica favorita.



Autor: El amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, sosteniendo un "guitarraso" eléctrico. Muchas gracias por tu generosidad, amigo.

Sin las integrales, calcular el área y volumen de agua de tan extravagante piscina sería una pesadilla imposible de realizar. Como podéis apreciar, una guitarra eléctrica no tiene de recto nada más que el mástil. Por todas las curvas que tiene, las integrales son imprescindibles.

Ahora retomamos la famosa *antiderivación*. Al ser como una imagen especular, su mecánica va al revés de lo que hemos hecho para derivar. Pongamos una tabla y expliquémoslo mejor:

Función El exponente es n x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponente es n-1	2x	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral / Antiderivada: El exponente es n+1	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral se puede simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Fuente: Elaboración propia, sobre datos extraídos del Canal "El Profe", *Introducción a las Derivadas.*

Así pues, mientras que en la derivada bajábamos el exponente en un 1, en la integral, el exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente: $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Veamos un ejemplo sacado de la tabla;

$$x^2 \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

Caso que la función tenga un número delante, lo dejamos tal y como está, e integramos. A modo de ejemplo:

$3x^4$ con lo que su integral será $\frac{3x^5}{5}$

Y ahora, sin anestesia ni nada, con dos *cohones*, nos tiramos a la piscina:

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$$

Final.

¿Cómo lo hemos hecho?:

1. Los tres primeros términos de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tienen ningún secreto. Simplemente, hemos aplicado $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ y nos quedamos tan panchos.

2. A la integral de cualquier número sólo, se le agrega una x, por eso al integrar, el 2 lo hemos convertido en 2x. (Recuerda que cuando derivábamos, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral indefinida[18] como esta, siempre se acaba añadiendo una C o una K al final, que simbolizan una CONSTANTE.
   - ✓ Recuerda que, cuando derivábamos, la derivada de un número solo era igual a 0.
   - ✓ Ponemos la C o la K, porque al ser una integral no definida, no tenemos forma alguna de determinar (=saber) cuál era ese número.

Vamos a hacer una ruta completa que nos va a llevar desde una función inicial, para luego hacerle su derivada y luego, a partir de ésta, obtener su integral.

A partir de una función, primero la derivaremos y luego, agarramos la derivada y le haremos su integral:

Sea la función y= $4x^2$+5x-3

Al derivarla nos queda: 2*4x +5 ➡ y'= 8x +5

Y ahora vamos a hacer su Integral:

$$\int (8x + 5)\, dx$$

$$Y' = \frac{8x^2}{2} + 5x + c \Rightarrow 4x^2 + 5x + c$$

[18] Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función.

INTEGRALES DEFINIDAS

¿Qué es cada cosa en una integral definida?

Una integral definida está compuesta por 5 elementos:

1. La **integral definida** se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int$ es el signo de integración.
3. **a** es el límite inferior de la integración.
4. **b** es el límite superior de la integración.
5. $\mathrm{f(x)}$ es el **integrando** o función a integrar.
6. dx es **diferencial** de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Haciendo una integral definida, paso a paso.

Sea $\int_1^2 x^2 \mathrm{dx}$

Paso 1: Las operaciones matemáticas son las mismas que en las integrales indefinidas, es decir, primero buscamos la antiderivada de la función: El exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ o sea:

$$x^2 \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

Paso 2: Ahora vamos a integrar aplicando los límites de la integración, lo que en cristiano quiere decir que tenemos que substituir la x, primero por el límite superior y luego por el límite inferior. No lo digo yo, sino el Teorema Fundamental del Cálculo.

T.F.C.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Así que vamos a substituir la x por los límites de la integral y operamos. La cosa va a quedar así:

$$\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{7}{3}}$$

Y lo dejamos así, como resultado final, puesto que no lo podemos reducir, y si dividimos 7 entre 3 No nos da un número entero. ($\frac{7}{3}$ = 2,33333…).

CÁLCULO INTEGRAL



¿HAY ALGUNA RECETA PARA HACER LOS EJERCICIOS DE MATES?

Pues la más básica es el proceso L.E.D.O.C

LEER.

ENTENDER.

DESCUBRIR.

OPERAR.

COMPROBAR.

Obviamente, cuando cojas práctica pasarás directamente de Entender a Operar, pero como proceso de estratégia de pensamiento para empezar a resolver problemas de matemáticas, no conozco otro mejor.

La estratégia de pensamiento para resolver un problema matemático, mediante el proceso L.E.D.O.C. pasa por realizar cuatro pasos:

1. **Leer el problema detenidamente para Entender qué nos piden que averiguemos (*la incógnita*) y qué elementos nos dan (*datos*).**
2. **Descubrir qué àreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.**
3. **Ejecutar las Operaciones matemáticas correspondientes.**
4. **Comprobar el resultado, primero desde la lógica y luego con operaciones complementarias.**

Veamos su aplicación práctica en un problema:

"Eres el primer comprador de una parcela de terreno urbanizable, con forma de rectángulo, que tiene 30 metros de largo y 22 metros de ancho. El Ayuntamiento te exige que marques ese terreno usando una valla. Hablas con un constructor y te dice que te va a cobrar el metro de valla a 25€ + I.V.A.

Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

1. Leer el problema detenidamente para Entender qué nos piden que averiguemos y qué datos nos dan.

Nos piden que averiguemos el coste de vallar nuestra parcela. A éste elemento le llamaremos *incógnita*.

Como *datos* nos dan las dimensiones del terreno, nos dicen que tiene forma de rectángulo y por último, cuánto cuesta el metro de valla construido.

Esta fase es crucial. No importa si tienes que leer el problema tres veces seguidas (o las que haga falta). Antes de ponerte a operar, asegúrate de haber entendido qué datos te están dándo y cuál es la incognita que debes averiguar.

2. Descubrir qué àreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.

Tenemos tres datos en forma de números naturales (largo, ancho y precio), por lo que recurriremos a la aritmética y nos dicen que es un rectángulo, por lo que también es un tema de geometría. Dentro de la geometría, se trata del perímetro de un rectángulo, que es la suma de todos los lados del mismo, por lo que podemos deducirlo de dos maneras diferentes: o sumamos los cuatro lados o hacemos servir la formula correspondiente a la perímetro de un rectángulo.

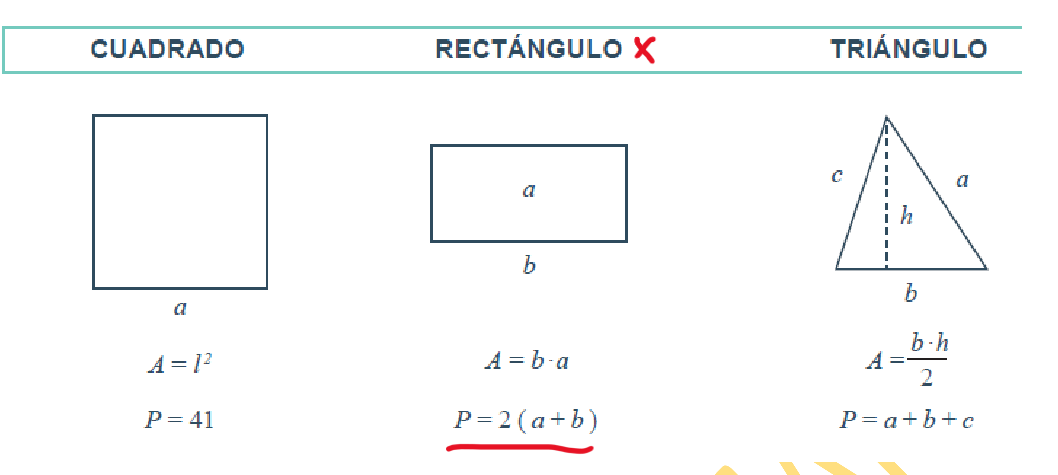
3. Ejecutar las Operaciones matemáticas correspondientes.

Averiguamos la distancia a vallar sumando los cuatro lados, es decir, 30 + 22 + 30 + 22 = 104 metros.

O podemos recurrir la fórmula del perímetro de un rectángulo que es $P = 2\ (a+b)$ y se lee como "Perímetro igual a multiplicar por dos la suma del lado más largo y la del lado más corto".

MATEMÁTICAS

RESUMEN DE FÓRMULAS DE ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS



P = 2 (a+b) y aplicando → 2 (30+22) → 2 (52) → 104 metros.

Finalmente, multiplicamos los 104 metros por los 25€ que cuesta el metro de valla y obtenemos que

104 metros x 25€ = 2.600€

Pero aún nos queda por responder a la parte impositiva. Es un tema que podemos resolverla de tres maneras diferentes:

<u>Método 1: Mediante una Regla de Tres con resultado parcial</u>.

Precio en €	*Porcentaje*
2.600€	100
X	21

$$X = \frac{2.600 \, x \, 21}{100} = 546€$$

Ojo al Cristo, que es de plata. 546€ es lo que nos cobran de I.V.A. Si nos piden sólo eso, ya hemos terminado.

Pero si volvemos al enunciado, decía:

(…) "Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

Por lo que al precio sin I.V.A. que son 2.600€, toca añadirle lo que hemos calculado, que son 546€. Así pues, lo que tenemos que hacer es sumar ambas cantidades:

$$2.600€ + 546€ = 3.146€.$$

Ya lo tenemos, pero no te cierres mentalmente en banda, ya que aún nos quedan otros dos métodos.

Método 2: Mediante una Regla de Tres con resultado global.

Como nos piden cuánto es el precio total, sabemos que al 100% de lo calculado (2.600€) hay que añadirle el 21% de I.V.A. por lo que, en realidad, visto en términos de porcentaje total, nos interesa conocer cuánto dinero es el 121% de 2.600€. También lo podemos resolver mediante otra regla de tres:

Precio en €	*Porcentaje*
2.600€	100
X	121

$$X = \frac{2.600 \ x \ 121}{100} = 3.146€$$

Método 3: Mediante el cálculo de porcentajes en via directa.

Recuerda lo que vimos al respecto.

PORCENTAJES – MÉTODO DIRECTO

Si quiero calcular el 25%	·0,25
Si quiero calcular el 30%	·0,30
Si quiero aumentar un 25%	·1,25
Si quiero aumentar un 30%	·1,30
Si quiero disminuir un 25%	·0,75
Si quiero disminuir un 30%	·0,70

Este tercer método es el que más me gusta, por lo sencillo y rápido que es.

Si quiero aumentar un 21%, todo lo que tengo que hacer es multiplicar el importe sin I.V.A. (2.600€) por 1,21 y ya lo tengo:

$$2.600€ * 1,21 = 3.146€.$$

4. Comprobar el resultado, primero desde la lógica y luego con operaciones complementarias.

Mediante la lógica: El resultado es razonablemente correcto porque, si hubiésemos vallado 100 metros nos hubiese costado 2.500€. Como lo obtenido es ligeramente superior, debe ser correcto. Observa que sólo comprobamos la parte principal, para facilitar y agilizar las operaciones.

Mediante operaciones complementárias: 100 metros serían 2.500€ y 4 metros son 25x4€= 100€ por lo que si sumamos 100 + 4 metros son 2.500€ + 100€, y salen los 2.600€ que hemos obtenido antes.

Podemos estar tranquilos/as ya que el resultado es correcto, puesto que hemos llegado a él por dos lineas de razonamiento y de operación diferentes.

CONSEJOS PARA DEAMBULAR CON ÉXITO POR EL PLANETA DE LAS MATEMÁTICAS.

Albert Einstein dijo una vez: **"Todo el mundo es un genio. Pero si juzgas a un pez por su habilidad para trepar a un árbol, vivirá toda su vida creyendo que es un inútil".**

- ✓ Echa mano de YouTube, que para eso está. Te dejo los enlaces a 8 profesores YouTubers que explican muy bien. Si no te gustan o no te sirven, no pasa nada. Sigue buscando, que alguno/a encontrarás que te haga asequible las mates.
- ✓ Cuida tu autoestima: Tener un fracaso NO significa que seas un/a fracasado/a. Las mates serán, en gran parte, lo que tu decidas que sean.
- ✓ Ármate de Paciencia: Es normal no entenderlo todo a la primera, a la segunda o a la que sea. Persevera hasta que lo entiendas.
- ✓ Evita compararte o que te comparen con otro/a. Es injusto. Cada persona tiene su ritmo de aprendizaje, o necesita que le expliquen las cosas de una manera determinada.
- ✓ Cómpra libros de texto que te resulten asequibles. Hay tantas formas de enseñar matemáticas como profesores y libros.
- ✓ Practica mucho. No hay mejor escuela que hacer muchos ejercicios, por eso asegúrate de comprar libros que lleven el solucionario, bien al pie de cada ejercicio, en las últimas páginas del libro o en un librito aparte.
- ✓ No pases ninguna vergüenza o sientas miedo de reconocer que necesitas ayuda particular y personalizada. Las clases particulares son la mejor solución cuando suele fallar todo lo demás. En Internet hay varias plataformas que se dedican a contactar a profesores y alumnos. A su vez, muchos de esos profesores pueden dar clases presenciales (Si da la casualidad que ambos vivis en la misma localidad) o en formato Online. También queda el socorrido recurso de fijarte en los carteles que se suelen colgar en panaderías o tiendas de tu barrio, que

han sido el vector tradicional que se ha usado para publicitar las clases particulares.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA.

- AGUSTÍN LARRAURI PACHECO. Formación Profesional Matemáticas. Editorial Larrauri. Bilbao.
- Link que permite la descarga de libros de texto españoles para la ESO y el Bachillerato **www.apuntesmareaverde.org.es**
- RAMON FERRER I MARÍ. "NOCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA PULPOS EN UN DESIERTO" repositorio de internet https://archive.org/details/@ramon_ferrer_i_mari

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Matemáticas simplificadas
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-348-8

Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 1640

LISTADO DE PROFESORES YOUTUBERS CONSULTADOS EN ESTE ARTÍCULO:

- **Bruno Bernal.** Canal de YouTube donde encontrarás la teoría, explicada de una forma muy sencilla, de temas de matemáticas, como Ecuaciones, Potencias, Derivadas e Integrales. Su titular es Bruno Bernal, licenciado en Psicología con la especialidad de Educación, Ingeniero de Edificación y Arquitecto Técnico. https://www.youtube.com/playlist?list=PLwkJeiatsbfZ1plQSW_guGcJzk3kKBc6u

- **Matemáticas profe Alex**. Su titular es Alexander Gómez, Licenciado en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex/playlists

- **El Profe.** Su titular es Braulio Mendoza, profesor de Calculo diferencial e integral, matemáticas superiores, ecuaciones diferenciales, física moderna y probabilidad y estadística. Actualmente es Coordinador Técnico de Capacitación Mantenimiento en VivaAerobus, en México. https://www.youtube.com/@ElProfe1977/playlists

- **Julioprofe.** Su titular es Julio Alberto Ríos Gallego (Cali, 22 de marzo de 1973), más conocido como Julioprofe, es un ingeniero civil, profesor, conferencista, tutor y youtuber colombiano. https://www.youtube.com/@julioprofe

- **Profesor10demates**. Su titular es Sergio Castro, un ingeniero técnico industrial por la Universidad de León (España), y que cuenta con el Grado Superior de Ingeniería Mecánica por la UNED. Profesor de Matemáticas, Física y Química desde hace 15 años y apasionado del vibrante mundo de las ciencias. Si buscas un profesor polifacético que te enseñe Matemáticas, Física y Química, te aconsejo a este hombre simpático y cariñoso, se ha ganado su éxito en YouTube por derecho propio. https://www.youtube.com/@profesor10demates

- **Blue Dot.** Paulo César Churata Huamaní es un físico peruano que enseña Matemáticas y Física mediante animaciones realizadas en Python, un programa de animaciones que le imprime una forma novedosa y muy didáctica. https://www.youtube.com/@BlueDot96

- **El Traductor de Ingeniería.** Damían Pedraza es un ingeniero electrónico argentino. Sus clases son muy socráticas, en el sentido que desea que quien visita su canal, aprenda a pensar. Su estilo es muy personal, pero aún así, muy recomendable. https://www.youtube.com/@eltraductor_ok

- **Píldoras Matemáticas.** Francisco Gil Recio es un profesor madrileño que ha creado este canal, mediante la ingeniosa idea de dividir los temas en Listas de reproducción que contiene un numero variable de cortos vídeos, de unos 10 minutos o menos de duración. https://www.youtube.com/@pildorasmatematicas9582

Para conocimientos sobre Física y Química, os aconsejo al inteligentísimo y excelente divulgador Alberto Romaña y su canal **HRom**

Este joven ingeniero de Castro Urdiales, Cantábria, España ha sido objeto de una sucia campaña de desprestigio por motivos políticos y económicos. Doy fe de su decencia, profesionalidad y amor por la ciencia. Si él hubiese sido profesor mío, yo hubiese aprendido Química mucho antes

youtube.com/channel/UCeiyuZljcK9iXzMAgzb9kpA/join

LOS APUNTES, LA CLAVE PARA ENTENDER, ESTUDIAR E INTERIORIZAR.

Saber tomar apuntes en clase, así como tener organizados los tuyos es imprescindible. Te aconsejo que pongas en tu buscador en internet la frase *apuntes de matemáticas* y eches un vistazo a los vídeos que aparecen.

Hay muchas maneras de tormarlos, así que invierte tiempo en encontrar aquel sistema que te los haga cómodos y asequibles. Para simplificar tu búsqueda, te aconsejo a la inteligentísima YouTuber Mexicana, Thelma Clatza, que tiene un video interesantísimo, en el que explica y compara diferentes métodos de tomar apuntes.

Se titula: *"8 maneras de tomar apuntes que todo estudiante debe conocer / cornell, boxing, outline y más".* Su enlace es https://www.youtube.com/watch?v=V-BpvNafw_4

LA GRAN PREGUNTA

Vamos a suponer que soy una persona normalita, y que no tengo ninguna profesión técnica que me exija tener un nivel alto de Matemáticas, es decir, que no preciso, por ejemplo, conocer el Análisis Matemático como la palma de mi mano.

¿Cuántas Matemáticas preciso saber en mi vida cotidiana?

Como señala Miquel Albertí Palmer (profesor del Máster Interuniversitario de Didáctica de las Matemáticas en Barcelona y catedrático de Matemáticas en el INS Vallés de Sabadell) en su obra **Las matemáticas de la vida cotidiana: LA REALIDAD COMO RECURSO DE APRENDIZAJE Y LAS MATEMÁTICAS COMO MEDIO DE COMPRENSIÓN***:*

"*La Competencia matemática vital es más una cuestión de actitud más que de contenido.*

En cuanto a los contenidos, una persona se desenvolverá cómodamente en la vida cotidiana si es capaz de realizar estas 12 habilidades relacionadas con las Matemáticas:

1) *Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos.*
2) *Usar la calculadora a nivel elemental.*
3) *Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje).*
4) *Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro).*
5) *Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas.*
6) *Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente, ya sean de origen algebraico (lineales, cuadráticas) o experimental (edad-estatura, masa-importe…).*
7) *Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales: segmento, recta, cónicas, cuadriláteros, triángulos, polígonos, poliedros y cuerpos circulares.*
8) *Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos.*
9) *Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras geométricas y expresiones algebraicas sencillas.*
10) *Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría.*
11) *Usar decimales, fracciones y porcentajes para medir la incertidumbre.*
12) *Contar y determinar las características de una población (moda y media aritmética).”*

Y aquí termina esta pequeña guia.

Espero que te haya sido de utilidad, con mis mejores deseos de superación para ti.

Barcelona, noviembre de 2023 – noviembre de 2024.